Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Un modèle d'épidémie

En 1979, une épidémie de rage, en provenance d'Europe orientale, est arrivée en France, principalement par l'Est. Les renards étaient l’un des vecteurs de la rage. En notant $S$ les individus sains et $I$ les individus infectés on peut proposer comme modèle de transmission de la rage, tenant compte de la contamination des renards sains par des renards malades le modèle suivant ($r$, $K$, $\beta$, $u$ étant des constantes positives) :

\[
\begin{align*}
S'(t) &= r(S(t) + I(t)) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \beta S(t)I(t) \\
I'(t) &= \beta S(t)I(t) - uI(t)
\end{align*}
\]

(1)

1. Préciser quelle est, selon ce modèle, la dynamique de la population de renards lorsqu'il n'y a pas d'individus infectés.
Lorsque $I(t)=0$, on a $S'(t) = rS(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)$. On reconnaît une dynamique logistique : la population présente donc une croissance amortie et tend vers $K$.

2. Même question s'il n'y a que des individus infectés (et plus aucun individu sain).
Lorsque $S(t) = 0$, $I'(t) = -uI(t)$. On reconnaît une dynamique exponentielle : la population va décroître exponentiellement vers 0 (extinction) : $I(t) = I(0) e^{-ut}$.

3. Indiquer ce que représente chacun des paramètres $r$, $K$, $\beta$, $u$ et justifier ce modèle.
$r$ et le taux de naissance intrinsèque de la population bactérienne.
$K$ et la capacité de résistance de la population saine.
$\beta$ est le taux de mortalité de individus infectés.
$u$ est le taux d'interaction (ou d'infection) entre $S$ et $I$.

4. Pour étudier le système plus facilement, réécrire le système en remplaçant les coordonnées $S$ et $I$ par $x$ et $y$ et en supposant que $r = 1, K = 2, \beta = 1$, et $u = 1$.

\[
\begin{align*}
x' &= (x + y) \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\
y' &= xy - y
\end{align*}
\]

5. Calculer l'isocline $y' = 0$ (dite horizontale) et en déduire les coordonnées des trois points d'équilibres du système.
L'isocline $y' = 0$ a pour équation $xy - y = 0$. Cela donne la réunion de deux droites $y = 0$ et $x = \frac{y}{x}$.
Pour calculer les équilibres, on pose
\[
\begin{align*}
x' &= 0 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x'(1 - \frac{x}{2}) = 0 \\
y = 0
\end{cases} \Rightarrow x = 0 \\
y = 0 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\
y = 0
\end{cases}
\end{align*}
\]
ou $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$.
6. Calculer la matrice jacobienne $A(x, y)$ du système et en déduire les systèmes linéarisés au voisinage des trois points d'équilibre.

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dx} & \frac{dy}{dx} \\ \frac{dx}{dy} & \frac{dy}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x & 3y \\ y & x - 1 \end{pmatrix}$$

au point d'équilibre $(1, 0)$, le linéarisé est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

au point d'équilibre $(0, 1)$, le linéarisé est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

au point d'équilibre $(0, 0)$, le linéarisé est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

7. Déduire de la question précédente la nature des points d'équilibre. On pourra vérifier si les résultats obtenus sont compatibles avec le tracé des trajectoires ci-dessous:

Remarque: $x=x, y=1$

- Au point $A_1(1, 1)$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = \frac{3}{2}$

- Au point $B_1(0, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = 0$

- Au point $C_1(0, 1)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = 1$

- Au point $B_1(0, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = 0$

8. En étudiant la dynamique de l'épidémie selon le nombre d'individus infectés à l'instant initiale, pensez-vous que, selon ce modèle, l'épidémie restera maîtrisée?

Si le nombre d'individus S et I connaître au point $H(3, 3)$, la trajectoire se dirige vers la gauche en montant peu, proche d'être vers l'équilibre $(1, 1)$. Le nombre d'individus sain, décrir vers à équilibre (inférieur à sa capacité biotique) et le nombre d'individus infectés va commencer par croître pour décrire une fonction vers une valeur limite : l'épidémie est donc maîtrisée.