

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Couige

Analyse : Feuille de réponses du TP 1
Approximation linéaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Rappel : On se souviendra que l'équation d'une droite de pente a et passant par le point (x_0, y_0) est $y = a(x - x_0) + y_0$ et donc celle d'une droite passant par les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$.

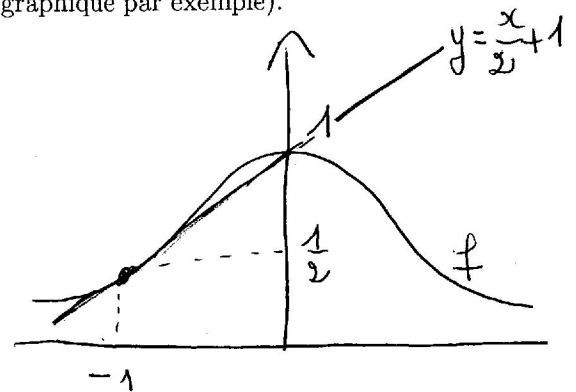
Exercice 1. : Calculer la tangente à la courbe d'Agnesi¹ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ au point $(-1, \frac{1}{2})$. Représenter la courbe et sa tangente (en vous servant de votre calculette graphique par exemple).

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad f'(-1) = \frac{1}{2}$$

Equation de la tangente :

$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1))$$
$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + 1) = \frac{x}{2} + 1$$



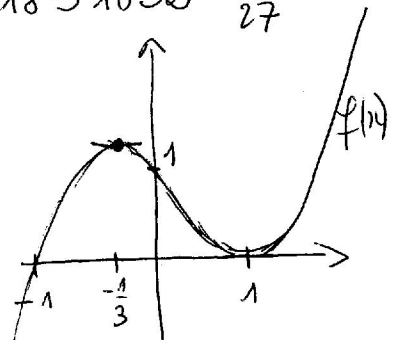
Exercice 2. : Trouver les points $(x, f(x))$ du graphe de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ où la tangente est horizontale.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1)$$

Donc $f' = 0$ au point $x = -\frac{1}{3}$ et au point $x = 1$

En ces points f vaut : $f(-\frac{1}{3}) = 1,1851852 = \frac{32}{27}$

Les deux points cherchés sont donc $(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$ et $(1, 0)$.



¹Maria Gaetana Agnesi, mathématicienne italienne, 1718-1799 (voir par exemple http://fr.wikipedia.org/Maria_Gaetana_Agnesi).

Exercice 3. : En quels points de la courbe d'équation $f(x) = x\sqrt{x}$ la droite tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $3x - y + 6 = 0$? Donner l'équation de la tangente à f en ce point.

La pente de la droite $y = 3x + 6$ est 3. Comme $f(x) = x^{3/2}$, on a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$\text{On a } f'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 4$$

Au point $(x_0 = 4, f(x_0) = 8)$, l'équation de la tangente est

$$y = f(4) + f'(4)(x-4) = 8 + 3(x-4)$$

Donc cette tangente a pour équation $\boxed{y = 3x - 4}$

Exercice 4. : Calculer la linéarisée $L(x)$ de $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$. Même question pour $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = -8$.

On utilise la définition $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Donc pour $f(x) = x^3$ et $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$, $f'(x) = 3x^2 \Big|_{x=1} = 3$
 D'où $L(x) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$ $\boxed{L(x) = 3x - 2}$

Pour $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $x_0 = -8$, $f(-8) = -2$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

$$\text{d'où } f'(-8) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(-8)^{2/3}} \right) \Big|_{x=-8} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Donc } L(x) = -2 + \frac{1}{12}(x+8) = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3} \quad \boxed{L(x) = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}}$$

Exercice 5. : Vérifier les approximations linéaires suivantes (calculées en $x = 0$) :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$$

$$\sin x \simeq x, \quad \cos x \simeq 1$$

$$e^x \simeq 1 + x, \quad \ln(1+x) \simeq x$$

• $f(x) = \sqrt{1+x}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $L(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0)$

• $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{-1}{1+x}$, $f'(0) = -1$, $L(x) = 1 - 1 \cdot x$

• $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, $L(x) = 0 + 1 \cdot x$

• $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$, $L(x) = 1 + 0 \cdot x$

• $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$, $L(x) = 1 + 1 \cdot x$

• $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$, $L(x) = 0 + 1 \cdot x$

Exercice 6. : Trouver la linéarisée de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $x=0$ et l'utiliser pour calculer une valeur approchée de $\sqrt[3]{0,95}$ et de $\sqrt[3]{1,1}$. Comparer avec les valeurs données par votre calculatrice. Faites un dessin pour représenter l'erreur entre la valeur approchée calculée et la valeur exacte.

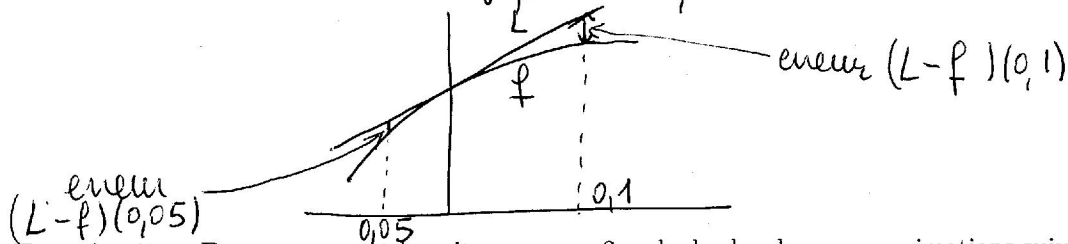
$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} \quad f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x)^{2/3}} \quad L(x) = 1 + \frac{1}{3}x$$

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{0,95} = f(-0,05) \quad L(-0,05) = 1 - \frac{0,05}{3} \approx 0,9833 \quad \text{donc } \sqrt[3]{0,95} \approx 0,9833$$

$$\sqrt[3]{1,1} = f(0,1) \quad L(0,1) = 1 + \frac{0,1}{3} \approx 1,033 \quad \text{donc } \sqrt[3]{1,1} \approx 1,033$$

Pour la calculatrice $\sqrt[3]{0,95} = 0,9830476$ et $\sqrt[3]{1,1} = 1,0322801$



Exercice 7. : En commençant la suite par $x_0 = 2$, calculer les deux approximations suivantes x_1 et x_2 de la solution de $x^3 - 2x - 5 = 0$ obtenues par la méthode de Newton.

Même exercice pour $x^5 - 10 = 0$ avec $x_0 = 1,5$.

$$x_0 = 2 \quad f(x) = x^3 - 2x - 5 \quad f(x_0) = 8 - 4 - 5 = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad f'(x_0) = 12 - 2 = 10$$

$$x_1 = 2 - \frac{-1}{10} = 2,1 \quad f(x_1) = 0,061$$

$$f'(x_1) = 11,23$$

$$x_2 = 2,1 - \frac{0,061}{11,23} = 2,0945681 \quad \text{Donc } x_0 = 2, x_1 = 2,1, x_2 \approx 2,09$$

$$x_0 = 1,5 \quad f(x) = x^5 - 10 \quad f(1,5) = -2,40625$$

$$f'(x) = 5x^4 \quad f'(1,5) = 25,3125$$

$$x_1 = 1,5 - \frac{-2,40625}{25,3125}$$

$$x_1 = 1,5950617$$

$$f(x_1) = 0,3249385$$

$$f'(x_1) = 32,365326$$

$$x_2 = 1,585022$$

Donc le début de la suite est $(1,5; 1,595; 1,585; \dots)$
et la "vraie" valeur de $\sqrt[5]{10}$ est $1,5848939$.

