

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 12
Approximations quadratiques et formule de Taylor

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant et en déduire les polynômes de Taylor d'ordre 1 à 4 en $x_0 = 1$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$.

n	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$f^{(n)}(x)$	$(x+3)^{1/2}$	$\frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}$	$-\frac{1}{4}(x+3)^{-3/2}$	$+\frac{3}{8}(x+3)^{-5/2}$	$-\frac{15}{16}(x+3)^{-7/2}$
$f^{(n)}(x_0)$	2	1/4	-1/32	+3/256	-15/2048
$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$	2	$\frac{1}{4}(x-1)$	$-\frac{1}{64}(x-1)^2$	$\frac{1}{512}(x-1)^3$	$-\frac{5}{16384}(x-1)^4$

pour $x=1$ $(x+3)^{1/2} = 4^{1/2} = 2$, $(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{2}$ $(x+3)^{-3/2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
 $(x+3)^{-5/2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ $(x+3)^{-7/2} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

$$P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x$$

$$P_2(x) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}(x^2 - 2x + 1) = \frac{7 \cdot 16 - 1}{64} + x \left(\frac{8 + 1}{32} \right) - \frac{1}{64}x^2$$

$$P_3(x) = \frac{141}{64} + \frac{9}{32}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{512}(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)$$

$$= \frac{141}{64} + \frac{1}{512} + x \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{512} \right) + x^2 \left(-\frac{1}{16} - \frac{3}{512} \right) + \frac{1}{512}x^3$$

$$P_4(x) = \frac{1}{512} \left(7 + 147x - 33x^2 + x^3 - \frac{5}{512}(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 1) \right)$$

$$= \frac{1}{16384} \left(7 \cdot 512 + 147 \cdot 512x - 33 \cdot 512x^2 + 512x^3 - 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 30x - 1 \right)$$

$$P_1(x) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x$$

$$P_2(x) = \frac{141}{64} + \frac{9}{32}x - \frac{1}{16}x^2$$

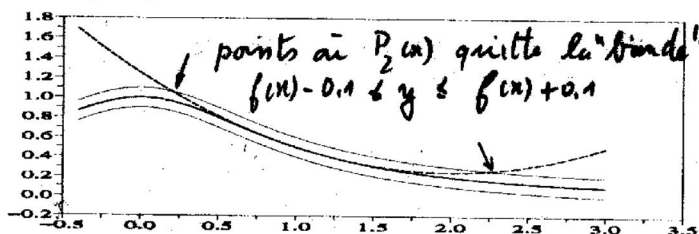
$$P_3(x) = \frac{7}{512} + \frac{147}{512}x - \frac{33}{512}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

$$P_4(x) = \frac{1}{16384} \left(3583 + 75294x + 16926x^2 + 512x^3 - 5x^4 \right)$$

Exercice 2. : On dit que le polynôme de Taylor $P_n(x)$ de f en $x = x_0$ approxime la fonction $x \mapsto f(x)$ à ε près si $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui, pour $\varepsilon = 0.1$ revient à dire que

$$f(x) - 0.1 \leq P_n(x) \leq f(x) + 0.1 \quad (1)$$

On pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; donc $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Pour $x_0 = 1$, on trouve $P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ et $P_2(x) = \frac{1}{4}(5 - 4x + x^2)$. La figure suivante représente les graphes des fonction f (en gras) $f + 0.1$ et $f - 0.1$ (en fin) et le polynôme de Taylor P_2 (en pointillés).



1. Déterminer visuellement un intervalle $[x_-, x_+]$ sur lequel P_2 approxime la fonction f à 0.1 près.

votre $x_- = 0.5$	votre $x_+ = 2$
-------------------	-----------------

par exemple...

2. pour trouver les x_- et x_+ les plus éloignés l'un de l'autre possible, quelle equation faut-il résoudre?

On voit que $P_2(x) \geq f(x) - 0.1$ (mais en toute rigueur il faudrait le prouver).

Il en va t de déterminer pour quels x on a bien $P_2(x) \leq f(x) + 0.1$

Pour cela, il convient de résoudre l'équation $P_2(x) = f(x) + 0.1$, d'où-d'où

votre équation : $\frac{1}{4}(5 - 4x + x^2) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{10}$

3. Réduire l'équation à la forme d'un polynôme égal à 0.

$$\frac{1}{4}(5 - 4x + x^2) = \frac{10 + x + x^2}{10(1+x^2)} \quad (\text{on a } \frac{11+x^2}{10(1+x^2)})$$

$$\Leftrightarrow (5 - 4x + x^2)10(1+x^2) = 4(11 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 10(5 - 4x + x^2 + 5x^2 - 4x^3 + x^4) = 44 + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 10x^4 - 40x^3 + 56x^2 - 40x + 6 = 0$$

équation réduite : $10x^4 - 40x^3 + 56x^2 - 40x + 6 = 0$
--

4. Utiliser les fonctions de résolution numérique de votre calculatrice pour trouver les meilleurs x_- et x_+ (approchés) :

$x_- \approx 0,1971144564$	$x_+ \approx 2,247260121$
----------------------------	---------------------------

