NOM : Corrigé

PRENOM :

Date :

Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 2
Extrema et bornes d'une fonction

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : Pour chacune des fonctions usuelles suivantes indiquer si elle possède un majorant, une borne supérieure, un minorant, une borne inférieure, un maximum global, un minimum global :

	$x \mapsto ax+b$, $a=0$	$x \mapsto ax+b$, $a \neq 0$	$x \mapsto -x^2$	$x \mapsto x^3$	$-\exp$	ln	cos	tan
borne supérieure	b	/	0	/	0	/	1	/
majorant	tout M $M \geq b$	/	tout M $M \geq 0$	/	tout M $M \geq 0$	/	tout M $M \geq 1$	/
minorant	tout m $m \leq b$	/	/	/	/	/	tout m $m \leq -1$	/
borne inférieure	b	/	/	/	/	/	−1	/
maximum global	b	/	0	/	/	/	1	/
minimum global	b	/	/	/	/	/	−1	/

" / " = "n'existe pas"

Exercice 2. :Trouver les points critiques des fonctions suivantes et indiquer si ce sont les arguments de maxima ou minima locaux de la fonction :

$$a)\quad f(x) = 5 - 8x \ ,\ b)\ f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$c)\quad f(x) = x^3 - 3x + 1 \ ,\ d)\ f(x) = x + \sin x$$

a) Comme $f'(x) = -8$, la dérivée de f ne s'annule jamais, donc f n'a pas de points critiques

b) On calcule la dérivée en utilisant la règle $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. On trouve :

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Donc f' s'annule en $x=-1$ et en $x=1$ qui sont les deux points critiques de f. Comme →

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$-1/2$	↗	$1/2$	↘	

on voit qu'en -1 f a un minimum local et en $+1$ f a un maximum local.

c) Comme $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$, on co que f' a deux zéros, $x=-1$ et $x=+1$ qui sont les points critiques de f. Le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	3	↘	-1	↗	

montre que $x=-1$ est un maximum local et $x=+1$ un minimum local

d) f est une fonction périodique de période 2π. Sa dérivée $f'(x) = 1 + \cos x$ s'annule en $x = \pi + 2k\pi$ mais f' ne chang pas de signe en ce point (elle reste positive ou nulle pour tout x. Donc aucun de ces points critiques $x_k = \pi + 2k\pi$ ne sont des maxima ou des minima locaux

x	0		π		2π
$f'(x)$	2	$+$	0	$+$	2
$f(x)$	0	↗	π	↗	2π

Exercice 4. : Les fonctions suivantes possèdent un maximum et un minimum global dans l'intervalle indiqué (pourquoi ?). Trouver ces deux extrema par la méthode à trois étapes :

a) $$f(x) = 1 - x^2 \text{ dans } [-2, 1]$$

b) $$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \text{ dans } [0, 2\pi]$$

c) $$f(x) = \sqrt{x}(1 - x) \text{ dans } [0.01, 1]$$

Ces trois fonctions sont continues donc, sur un intervalle fermé et borné, elles possèdent un maximum et un minimum global, d'après le théorème de la valeur extrême.

a) Comme $f'(x) = 2x$, la fonction $f(x) = 1-x^2$ possède un seul point critique $x = 0$ et $f(0) = 1$.
On calcule les valeurs de f en -2 et $+1$. On trouve $f(-2) = -3$ et $f(1) = 0$.
Des trois valeurs $f(0)$, $f(-2)$ et $f(1)$, $f(-2) = -3$ est le minimum et $f(0) = 1$ le maximum. Donc sur $[-2, 1]$, $-3 \leq f(x) \leq 1$.

b) Comme $f'(x) = \frac{(-\sin x)(2+\sin x) - (\cos x)(+\cos x)}{(2+\sin x)^2} = -\frac{2\sin x + (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2+\sin x)^2}$

$$= -\frac{2\sin x + 1}{(2+\sin x)^2} \quad (\text{car } \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

il en résulte que $f'(x) = 0 \iff 2\sin x + 1 = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2}$.
Les deux points critiques de f dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont donc $x = \frac{7\pi}{6}$ et $x = \frac{11\pi}{6}$. On a $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{7\pi}{6}}{2 - 1/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Comme $f(0) = f(2\pi) = -1/2$, on en déduit que $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ est le minimum global de f et a pour arguments $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est le maximum global de f et a pour arguments $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

c) On calcule $f'(x)$ en utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$. On obtient $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) + \sqrt{x}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - x - 2x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-3x)$. Donc f a un seul point critique $x = 1/3$. Et on a $f(1/3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
D'autre part $f(0{,}01) = \frac{1}{\sqrt{100}}\left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{99}{100}\right) = \frac{99}{1000} = 0{,}099$ et $f(1) = 0$. Donc, comme $\frac{2}{3\sqrt{3}} > \frac{99}{1000}$, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ est le maximum global de f d'argument $x = \frac{1}{3}$ et 0 est le minimum global de f, d'argument $x = 1$.

Exercice 6. : Trouver le point de la droite $y = 2x - 3$ le plus proche de l'origine et calculer cette distance minimale.

La distance à l'origine d'un point de coordonnées (x, y) est égale à $\sqrt{x^2+y^2}$. Pour un point de la droite $y = 2x - 3$, cette distance sera

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(2x-3)^2} = \sqrt{x^2+4x^2-12x+9} = \sqrt{5x^2-12x+9}$$

Cette distance est minimale si et seulement si son carré est minimal. Donc notre problème s'écrit : trouver l'argument du minimum de la fonction $f(x) = 5x^2 - 12x + 9$. Or $f'(x) = 10x - 12$ s'annule pour $x = \frac{6}{5}$. En ce point y vaut $y = \frac{12}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{3}{5}$. Le point le plus proche de l'origine est donc $\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ et sa distance à l'origine est $\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Exercice 7. : Vérifier la solution du problème de la clôture du chevrier. Reprendre le problème dans le cas où l'enclos est cette fois disposé en bordure de rivière sachant qu'il n'a pas alors besoin de le fermer le long de la rivière.

Si x et y sont respectivement la largeur et la longueur de l'enclos, le problème consiste à maximiser l'aire xy sachant que le périmètre de l'enclos (sur 3 cotés) $2x + y = 240$ et toujours $0 \leq x \leq 120$. Donc on cherche le maximum de la fonction $x(240 - 2x)$ sur l'intervalle $[0; 120]$. La fonction $f(x) = 240x - 2x^2$ a pour dérivée $f'(x) = 240 - 4x$ et donc pour point critique $x = 60$.

Comme $f(60) = 7200$ et $f(0) = 0$ et $f(120) = 0$, le maximum global de f est donc 7200 et son argument $x = 60$.

L'enclos optimal est donc un rectangle de largeur $x = 60\,m$ et de longueur $y = 120\,m$ et sa surface est de $7200\,m^2$.