NOM : Ded
PRENOM : Geoffray

Date : 15/10/07
Groupe : 0+

Analyse : Feuille de réponses du TP 5
Inverse d'une fonction

Exercice 1. :

1. Calculer le domaine de définition, l'image et l'inverse de la fonction $x \mapsto 3 - 2x$. Même exercice pour les fonctions suivantes $x \mapsto \sqrt{x+1} + 2$, $x \mapsto \ln x + 2$, $x \mapsto \ln(x+2) + 1$.
2. La fonction $x \mapsto x^2 - 4x - 2$ n'est pas monotone. Il est donc possible de définir des inverses de plusieurs façons (une par intervalle où f est strictement monotone). Préciser quelles sont ces différentes fonctions inverses. Même exercice pour $x \mapsto \cos\sqrt{1-x^2}$.
3. Donner les domaines de définition et les images des fonctions réciproques $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

1. La fonction $f := x \mapsto 3-2x$ est définie sur tout $\boxed{\mathbb{R}}$. Elle décroît continûment de $+\infty$ à $-\infty$ donc son image est aussi $\boxed{\mathbb{R}}$ tout entier. Pour calculer sa réciproque, je considère x dans $\mathbb{R}$ et y dans $\mathbb{R}$. J'ai : $y = 3-2x \iff 2x = 3-y \iff x = \frac{3-y}{2}$. La fonction réciproque est donc $\boxed{y \mapsto \frac{3-y}{2}}$.

2. La fonction $f := x^2-4x-2$ est décroissante sur $I :=]-\infty, 2]$ et croissante sur $I' := [2,+\infty[$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

L'image par f de ces deux intervalles est la même : $J := [-6,+\infty[$. Pour calculer par exemple la réciproque d'image I, je considère x dans I et y dans J. J'ai :
$y = x^2-4x-2 \iff y = (x-2)^2-6 \iff y+6 = (x-2)^2 \iff 2-x = \sqrt{y+6}$,
la dernière équivalence résultant de l'inégalité $2-x \geq 0$.
J'ai donc $x = 2-\sqrt{y+6}$ et la fonction réciproque est

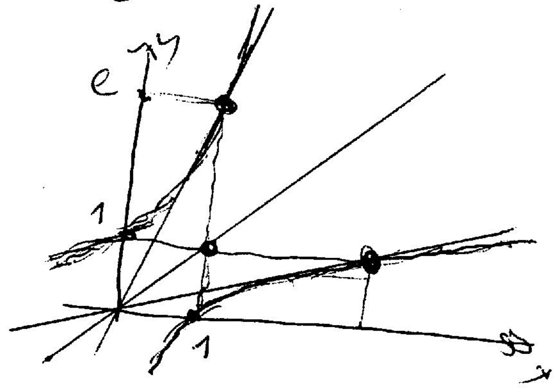
$$\boxed{y \longmapsto 2-\sqrt{y+6}}$$

De même $\boxed{y \mapsto 2+\sqrt{y+6}}$ est la réciproque de f d'image I'.

Exercice 2. :

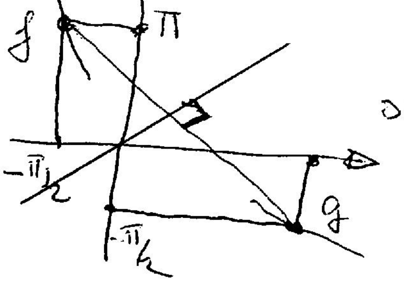
1. Comparer la dérivée de exp en $x = 1$ et celle de ln en $x = e$. Expliquer sur un dessin.
2. Calculer la dérivée de arctan en $x = \sqrt{3}$; celle de Arcsin en $x = -0,5$.
3. Soit g la fonction réciproque de $x \mapsto \cos x - 2x$. Calculer $g'(\pi)$. Faire un dessin.

1. La dérivée de exp en 1 est $e^x|_{x=1} = e$ et celle de ln en e est $\frac{1}{x}|_{x=e} = \frac{1}{e}$. Elles sont inverses l'une de l'autre, ce qui reflète la symétrie des tangentes par rapport à la première bissectrice.

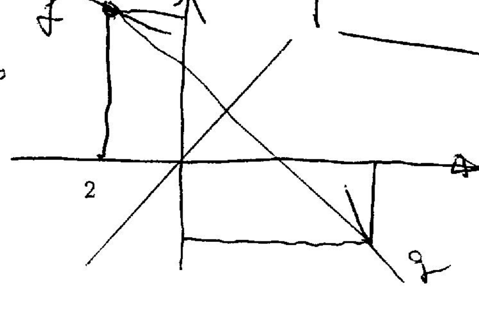


2. La dérivée de Arctan en $\sqrt{3}$ est $\frac{1}{1+x^2}|_{x=\sqrt{3}} = \frac{1}{1+3} = \boxed{\frac{1}{4}}$.
Celle de Arcsin en -0.5 est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}|_{x=-0.5} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

3. Soit $f := x \mapsto \cos x - 2x$. Je dois calculer $g(\pi)$ qui est la solution de l'équation $f(x) = \pi$. Je trouve la solution évidente $x := -\pi/2$. Donc $g(\pi) = -\pi/2$.
Je peux maintenant calculer : $g'(\pi) = \frac{1}{f'(g(\pi))} = \frac{1}{f'(-\frac{\pi}{2})}$.
Or, pour tout x réel, j'ai : $f'(x) = -\sin x - 2$. D'où $f'(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) - 2$ et $\boxed{g'(\pi) = -1}$



ou plutôt



Exercice 3. :

1. Calculer les dérivées premières et secondes des 3 fonctions hyperboliques.
2. Calculer l'équation de la droite tangente au graphe de $x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ au point $x = 1$. Même question pour $\mathrm{Argth}(3x)$ au point $x = \frac{4}{5}$.
3. Utiliser la méthode de Newton pour calculer une valeur approchée de l'unique solution positive de l'équation $\mathrm{ch}\, 2x = 1 + \mathrm{sh}\, x$.

1. J'ai $ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\, x$. Donc $\boxed{ch' = sh}$. De même $sh'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\, x$. Donc $\boxed{sh' = ch}$. Enfin j'ai $\left(\dfrac{sh}{ch}\right)'(x) = \dfrac{sh'.ch - ch'.sh}{ch^2}(x) = \dfrac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \dfrac{1}{ch^2(x)}$. D'où $\boxed{th' = \dfrac{1}{ch^2} = 1 - th^2}$. Pour les dérivées secondes, j'ai

$ch''(x) = sh'(x) = ch\, x$, donc $\boxed{ch'' = ch}$. De même $sh''(x) = ch'(x) = sh\, x$, d'où $\boxed{sh'' = sh}$. Enfin $th''(x) = -2th \times th'(x) = 2th^3(x) - 2th\, x$. D'où $\boxed{th'' = 2th^3 - 2th}$

2. Je pose $f := x \mapsto ch(\sqrt{x})$. J'ai, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} sh(\sqrt{x})$, d'où $f'(1) = \dfrac{sh 1}{2} = \dfrac{e - 1/e}{4} = \dfrac{e^2 - 1}{4e}$.
D'où l'équation de la tangente:
$y = ch 1 + \dfrac{e^2-1}{4e}(x-1) = \dfrac{e^2+1}{4e} + \dfrac{e^2-1}{4e}(x-1) = \boxed{\dfrac{e^2-1}{4e}x + \dfrac{1}{2e} = y}$

3. Je pose $f := x \mapsto ch 2x - 1 - sh(x)$. Je constate: $f(\ln\sqrt{2}) < 0 < f(\ln 2)$
Et je fais Newton en $a := \ln 2$. J'ai $f(a) = \dfrac{17}{8} - 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$.
Et $f'(a) = 2sh 2a - ch a = \dfrac{15}{4} - \dfrac{5}{8} = \dfrac{25}{8}$. D'où l'approximation
$N := \ln 2 - \dfrac{3/8}{25/8} = \ln 2 - 0.12$ $\boxed{N \sim 0.681}$

Exercice 4. :

1. On donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f définie sur I. Formaliser l'énoncé :

$$(E) f \text{ est injective sur } I$$

2. Dans le cas où $f : x \mapsto x^2$, choisir deux intervalles I l'un pour lequel l'enoncé (E) est vrai et l'un pour lequel il est faux.
3. Dans le cas où $I = [0, 3[$, choisir deux fonctions f l'une pour laquelle l'enoncé (E) est vrai et l'autre pour laquelle il est faux.
4. Calculer la négation et la contraposée de l'énoncé (E).
5. On pourrait dire que f est *pseudo-injective* si elle vérifie

$$(\tilde{E}) \forall x, y \in I, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y.$$

Calculer la contraposée de $(\tilde{E})$ et dire pourquoi cette définition est sans intérêt.

1. E s'explicite en $\boxed{\forall x, y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.}$

2. Pour $I := [0, +\infty[$, et x et y dans I, on sait bien que $x^2 = y^2$ équivaut à $x = y$, donc f est injective sur I. Pour $I := [-1, +1]$, f n'est pas injective sur I puisque $f(-1) = f(1)$.

3. Pour $I = [0, 3[$ et $f := x \mapsto x^2$, l'énoncé E est vrai, comme on vient presque de le voir. Pour $f := x \mapsto \sin(50x)$, il est faux comme on le voit avec $x := \frac{\pi}{50}$ et $y := \frac{2\pi}{50}$.

4. La négation de (E) est $\boxed{\exists x, y \in I,\ x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)}$.
La contraposée de ma version formelle de (E) est $\boxed{\forall x, y \in I,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)}$.

5. La contraposée de $\tilde{E}$ est $\boxed{\forall x, y \in I,\ x = y \Rightarrow f(x) = f(y)}$
Cette propriété est sans intérêt parce qu'elle est toujours vérifiée (quels que soient I et f).