Corrigé

NOM : Date :
PRENOM : Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 8
Calcul intégral (suite)

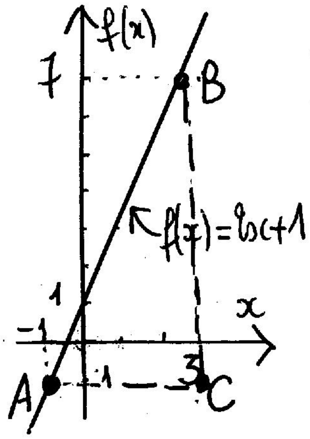
On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP. Les exercices supplémentaires ne sont à faire que par ceux qui ont terminé la feuille avant la fin de la séance.

Exercice 1. : Longueur d'une courbe

1. Calculer de deux façons différentes la longueur de l'arc de courbe défini par

$$y = 2x + 1 \ , \quad -1 \leq x \leq 3$$

tout d'abord en notant qu'il s'agit d'un segment de droite (par le théorème de Pythagore), puis comme graphe de la fonction $x \mapsto 2x + 1$.



1°) La longueur du segment AB qui est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC est $\|AB\| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

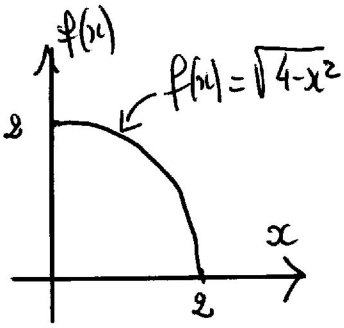
2°) $\|AB\| = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$ avec $f(x) = 2x+1$

$f'(x) = 2$ $\quad 1 + f'^2(x) = 1 + 2^2 = 5$. D'où

$\|AB\| = \int_{-1}^{3} \sqrt{5}\, dx = (3-(-1))\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$

2. Même question pour l'arc de courbe suivant, en notant qu'il s'agit cette fois d'un arc de cercle :

$$y = \sqrt{4 - x^2} \ , \quad 0 \leq x \leq 2.$$



1°) Le périmètre du cercle de rayon R étant $2\pi R$, on a ici pour un quart de cercle de rayon 2 $\frac{1}{4}(2\pi(2)) = \pi$

2°) Comme $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, d'où

$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4-x^2+x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$

$\int_0^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx = 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\left[\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$

Exercice 2. :

La valeur exacte à 0,001 près de $\int_0^1 e^{x^2}dx$ est 1,463. Calculer successivement les approximations S_n^g, S_n^d, M_n et T_n de cette intégrale pour $n = 5$. Dans chaque cas, on précisera si l'approximation surestime ou sous estime la valeur exacte et on expliquera le signe de l'erreur à partir d'un dessin.

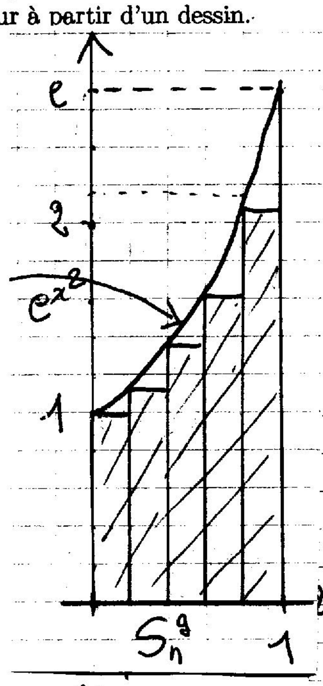
$f(x) = e^{x^2}$ et $\Delta x = \frac{1}{5}$

a) Rectangles à gauche

$$S_n^g = \left(1 + e^{(0,2)^2} + e^{(0,4)^2} + e^{(0,6)^2} + e^{(0,8)^2}\right)\frac{1}{5}$$

$$\simeq 1,308$$

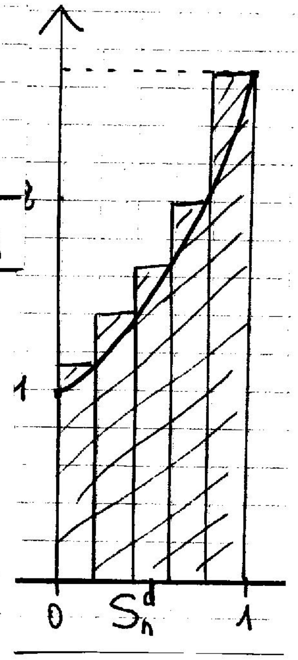
Cette approximation sous-estime 1,463
C'est également visible sur la figure →
où la région hachurée a une surface strictement inférieure à l'aire $\int_0^1 e^{x^2}dx$.



b) Rectangles à droites

$$S_n^d = \left(e^{(0,2)^2} + e^{(0,4)^2} + e^{(0,6)^2} + e^{(0,8)^2} + e^{1^2}\right)\frac{1}{5} \simeq 1,6524$$

Ici au contraire l'approximation surestime.
Sur le dessin, l'aire hachurée est plus grande (c'est le cas dès que f est croissante).

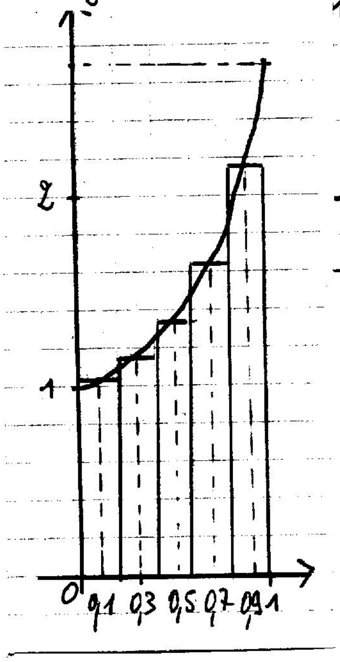


c) Points milieu

$$M_n = \left(e^{(0,1)^2} + e^{(0,3)^2} + e^{(0,5)^2} + e^{(0,7)^2} + e^{(0,9)^2}\right)\frac{1}{5}$$

$$\simeq 1,453$$

On constate que la méthode ici sous-estime la valeur exacte 1,463
Sur le dessin, par contre, on ne peut pas décider si c'est une sous-estimation ou surestimation.



d) Trapèzes

$$T_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\left(e^0 + 2e^{(0,2)^2} + 2e^{(0,4)^2} + 2e^{(0,6)^2} + 2e^{(0,8)^2} + e^1\right) \simeq 1,480$$

On constate ici que l'approximation surestime et c'est une conséquence de la convexité de la courbe $x \mapsto e^{x^2}$
Pour une fonction concave ce serait une sous-estimation.