Corrigé

NOM : Date :

PRENOM : Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 8
Calcul intégral (suite)

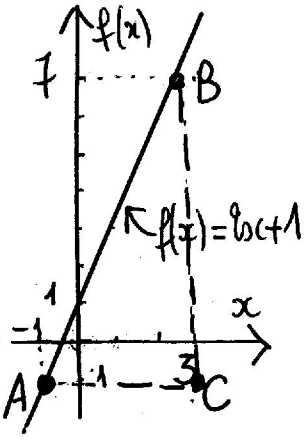
On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP. Les exercices supplémentaires ne sont à faire que par ceux qui ont terminé la feuille avant la fin de la séance.

Exercice 1. : Longueur d'une courbe

1. Calculer de deux façons différentes la longueur de l'arc de courbe défini par

$$y = 2x + 1 \ , \quad -1 \leq x \leq 3$$

tout d'abord en notant qu'il s'agit d'un segment de droite (par le théorème de Pythagore), puis comme graphe de la fonction $x \mapsto 2x + 1$.



1°) La longueur du segment AB qui est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC est

$\|AB\| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80} = \underline{\underline{4\sqrt{5}}}$

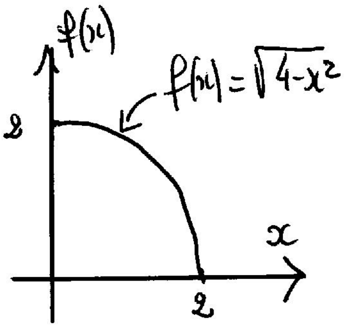
2°) $\|AB\| = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ avec $f(x) = 2x+1$

$f'(x) = 2 \quad 1 + f'^2(x) = 1 + 2^2 = 5$. D'où

$\|AB\| = \int_{-1}^{3} \sqrt{5}\,dx = (3-(-1))\sqrt{5} = \underline{\underline{4\sqrt{5}.}}$

2. Même question pour l'arc de courbe suivant, en notant qu'il s'agit cette fois d'un arc de cercle :

$$y = \sqrt{4 - x^2} \ , \quad 0 \leq x \leq 2.$$



1°) Le périmètre du cercle de rayon R étant $2\pi R$, on a ici pour un quart de cercle de rayon 2 $\frac{1}{4}(2\pi(2)) = \underline{\underline{\pi}}$

2°) Comme $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, d'où

$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4-x^2+x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$

$\int_0^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\left[\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \underline{\underline{\pi}}$

Exercice 2. :

La valeur exacte à $0,001$ près de $\int_0^1 e^{x^2}dx$ est $1,463$. Calculer successivement les approximations S_n^g, S_n^d, M_n et T_n de cette intégrale pour $n = 5$. Dans chaque cas, on précisera si l'approximation surestime ou sous estime la valeur exacte et on expliquera le signe de l'erreur à partir d'un dessin.

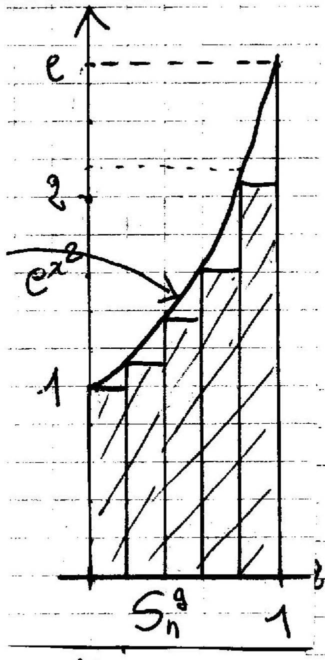
$f(x) = e^{x^2}$ et $\Delta x = \frac{1}{5}$

a) Rectangles à gauche

$$S_n^g = \left(1 + e^{(0,2)^2} + e^{(0,4)^2} + e^{(0,6)^2} + e^{(0,8)^2}\right)\frac{1}{5}$$

$$\simeq 1,308$$

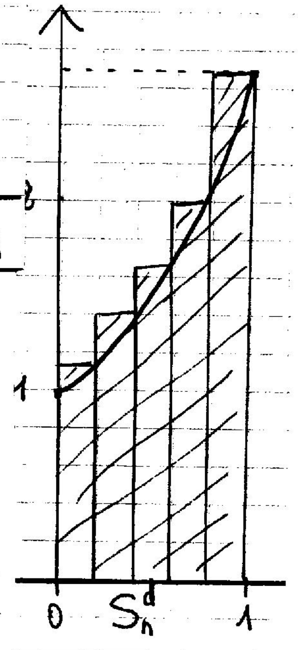
Cette approximation sous-estime $1,463$
C'est également visible sur la figure →
où la région hachurée a une surface strictement inférieure à l'aire $\int_0^1 e^{x^2}dx$.



b) Rectangles à droites

$$S_n^d = \left(e^{(0,2)^2} + e^{(0,4)^2} + e^{(0,6)^2} + e^{(0,8)^2} + e^{1^2}\right)\frac{1}{5}$$
$$\simeq 1,6524$$

Ici au contraire l'approximation surestime. Sur le dessin, l'aire hachurée est plus grande (c'est le cas dès que f est croissante).

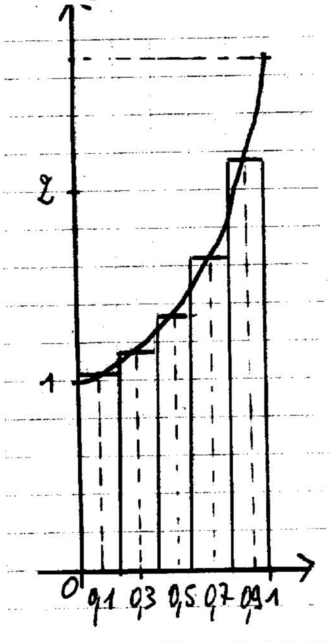


c) Points milieu

$$M_n = \left(e^{(0,1)^2} + e^{(0,3)^2} + e^{(0,5)^2} + e^{(0,7)^2} + e^{(0,9)^2}\right)\frac{1}{5}$$

$$\simeq 1,453$$

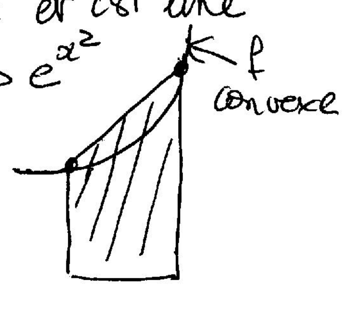
On constate que la méthode ici sous-estime la valeur exacte $1,463$
Sur le dessin, par contre, on ne peut pas décider si ce sera une sous-estimation ou surestimation.



d) Trapèzes

$$T_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\left(e^0 + 2e^{(0,2)^2} + 2e^{(0,4)^2} + 2e^{(0,6)^2} + 2e^{(0,8)^2} + e^1\right) \simeq 1,480$$

On constate ici que l'approximation surestime et c'est une conséquence de la convexité de la courbe $x \mapsto e^{x^2}$
Pour une fonction concave ce serait une sous-estimation.



Exercice 3. : Voici une liste de nombres au hasard répartis uniformément entre 0 et 1. En vous servant de cette liste, calculer une estimation de $\int_0^1 e^{x^2}dx$ par la méthode de Monté-Carlo pour $n = 5$ puis $n = 10$. Commentez vos résultats. Un autre choix de nombres aléatoires aurait-il donné les même approximations ? Le vérifier.

0,61	0,76	0,43	0,39	0,39	0,33	0,28	1,00	0,49	0,30
0,01	0,07	0,39	0,16	0,63	0,97	0,12	0,06	0,08	0,39
0,59	0,54	0,04	0,50	0,55	0,86	0,03	0,99	0,07	0,48

Pour $n = 5$, on choisit les 5 premiers tirages :

$$MC_5 = \frac{1}{5}\left(e^{(0,61)^2} + e^{(0,76)^2} + e^{(0,43)^2} + e^{(0,39)^2} + e^{(0,39)^2}\right)$$

$$\simeq 1,353$$

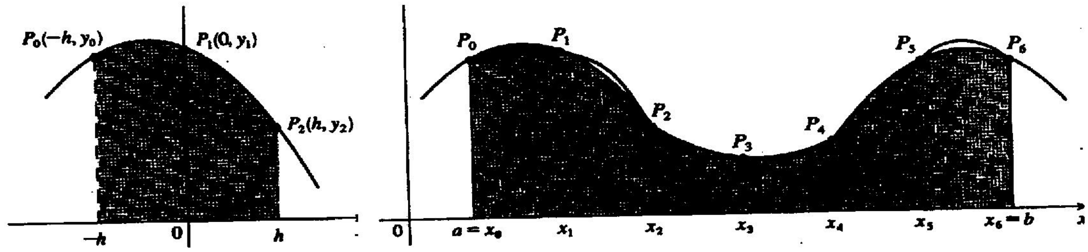
Pour $n = 10$, en choisissant les 10 premiers tirages

$$MC_{10} = \frac{1}{5}\left(e^{(0,61)^2} + \dots + e^{(0,30)^2}\right) \simeq 1,404$$

Il n'y a aucune raison qu'un autre tirage de 5 ou de 10 nombres entre 0 et 1 conduise à la même valeur pour MC_5 ou MC_{10}.
Ainsi $MC_{10} = 1,441$ pour la dernière ligne $(0,59 ; 0,54 ; \dots ; 0,48)$.
Les résultats obtenus sont plutôt médiocre et cela vient du fait que n n'est pas assez grand.

Exercice 4 : Méthode de Simpson

On considère le graphe d'une parabole $x \to f(x) = ax^2+bx+c$ sur l'intervalle $x \in [-h,h]$ et on suppose que $f(-h)=y_0$, $f(0)=y_1$ et $f(h)=y_2$ comme sur la partie gauche de la figure ci dessous.



Vérifier que $\int_{-h}^{h} ax^2+bx+c = h(\frac{2ah^2}{3}+2c)$. En déduire la formule $\int_{-h}^{h} ax^2+bx+c = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$.

$$\int_{-h}^{h} ax^2+bx+c\,dx = \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-h}^{h} = a\frac{h^3}{3}+\cancel{b\frac{h^2}{2}}+ch+a\frac{h^3}{3}-\cancel{b\frac{h^2}{2}}+ch = 2h\left(a\frac{h^2}{3}+c\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = f(-h) = ah^2-bh+c \\ y_1 = f(0) = c \\ y_2 = f(h) = ah^2+bh+c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) = \frac{h}{3}\left(+ah^2-\cancel{bh}+c+4c+ah^2+\cancel{bh}+c\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(2ah^2+6c\right) = 2h\left(a\frac{h^2}{3}+c\right)$$

$$= \int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\,dx$$

A l'aide de cette formule et de la figure ci dessus (à droite), calculer l'approximation de Simpson de l'intégrale - On suppose n pair.

$$\frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right).$$

En utilisant ce qui précède on voit que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(ax^2+bx+c)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$$

Donc si l'on désigne par $(Sim)_n$ l'approximation de Simpson,

$$(Sim)_n = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+\underbrace{f(x_2)+f(x_2)}+4f(x_3)+\underbrace{f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})}+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Exercices suplémentaires :

1. Calculer les longueur des arcs de courbe suivants :

$$y = \frac{1}{3}(x^3+2)^{3/2},\ 0 \le x \le 1 \text{ et } y = \frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^2},\ 1 \le x \le 3$$

2. Reprendre l'exercices 2 pour l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.
3. Reprendre l'exercices 3 pour l'intégrale $\int_0^1 \cos(x^2)dx$.