

**Calcul stochastique : TP 8**  
**Etude du modèle de Ho et Lee**

Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon  $Z_t^T$ ,  $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$ ,  $\delta t := T_{\max}/N$ ,  $t \leq T$ , où  $Z_t^T$  désigne la valeur à la date  $t$  d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date  $T$ . On a donc  $Z_T^T = 1$  pour n'importe quel  $T \in \mathbb{T}$ . C'est un modèle probabiliste sur un ensemble  $\Omega$  servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  servant à coder l'information disponible à la date  $t \in \mathbb{T}$ . En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$ ,  $\mathbb{T}^* := ]0..T]_{\delta t}$ ,  $X_t \in \{0, 1\}$ , les  $X_t$  de même loi  $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$ ,  $\mathcal{F}_t$ -mesurables, et indépendantes de  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{T}^*$ , on pose  $J_t := \sum_{s \in ]0..t]_{\delta t}} X_s$  et on note  $n$  et  $k$ ,  $n \leq k$ , les entiers tels que  $t = n\delta t$  et  $T = k\delta t$ . La caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les zéros coupons  $Z_t^T(\omega)$  appartiennent à un arbre binaire recombinant, c'est-à-dire que,  $Z_{n\delta t}^T(\omega)$  ne prend que  $n + 1$  valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur  $j = J_{n\delta t}(\omega)$ . Pour  $0 \leq j (= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$ , nous noterons  $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega) := Z(n, j, k)$ .

1. Pourquoi a-t-on  $Z(k, j, k) = 1$  ?

2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_t^{t-\delta t}} \eta(\theta^T(t), X_t), \text{ où } \theta^T(t) := T - t, \quad (1)$$

pour une fonction  $\eta$  définie par le choix<sup>1</sup> d'un  $\delta > 1$ , caractérisant, avec  $\pi \in ]0, 1[$ , le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \quad (2)$$

Les valeurs des  $Z_0^T$ ,  $T \in \mathbb{T}$ , peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant  $t = 0$ .

Calculer  $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$  pour tout  $\theta$  et  $t$  dans  $\mathbb{T}^*$ , et où  $\mathbb{E}^*$  désigne l'espérance pour la probabilité  $\mathbb{P}^*$ .

3. Voici une implantation du modèle pour lequel on a  $T_{\max} = N$  (et donc  $\delta t = 1 = \text{delta\_t}$ ),  $t = n * \text{delta\_t}$ ,  $T = k * \text{delta\_t}$ ,  $J_t(\omega) = j$ ,  $T - t = 1 * \text{delta\_t}$ ,  $T = k * \text{delta\_t}$ ,  $\eta(T - t, X_t(\omega)) = \text{eta}(1 * \text{delta\_t}, x)$ , pour  $x = X_t(\omega)$ ,  $Z_t^T(\omega) = Z(n, j, k)$ , pour  $J_t(\omega) = j$ , avec les choix  $\pi = \text{pi} := 0.5$ , et  $\delta = \text{delta} := 1.01$ .

---

<sup>1</sup>C'est le choix  $\delta (= \eta(\delta t, 1) / \eta(\delta t, 0)) > 1$  qui exprime qu'un  $X_t(\omega) = 1$  code un "up" et  $X_t(\omega) = 0$  code un "down"

```

// Modèle de Ho et Lee
clear ;Nmax=8 ;Tmax=Nmax ;delta_t=Tmax/Nmax ;
pi=0.5 ;delta=1.01 ;r=0.025 ;
function z0=Z0(k) ; z0=(1+r)^(-k*delta_t) ; endfunction ;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax)) ;
//
function ee=eta(l,x) ;
if x==0
ee=(1^l)./(pi+(1-pi)*delta^l) ;
else ee=delta^l./(pi+(1-pi)*delta^l) ;
end ;
endfunction ;
// représentation des eta extrêmes
xset("window",1) ;clf(1) ;
Nprime=1000 ;for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)) ; end ;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1) ;
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k) ;
end ;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1) ;
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1) ;
end ;
end ;
end ;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1) ;
endfunction ;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2) ;clf(2) ;
N=Nmax ;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N)) ; end ;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1) ;
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N) ;
end ;
plot(n1 :N,Vecteur,"--r") ;
end ;
xs2gif(2,"arbHoLee.gif") ;xs2eps(2,"arbHoLee.eps") ;xs2fig(2,"arbHoLee.fig") ;

```

(a) Comment a été choisie la fonction  $T \mapsto Z_0^T$  constituée par les valeurs initiales de  $Z_t^T$  ?

- (b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de  $Z^8$  : que vaut  $Z_8^8$ ? Que vaut  $Z_0^8$  et retrouver cette valeur sur la courbe **StructureParTermesInitiale**? Que vaut  $Z_4^8$  après deux "up" et deux "down"? Que vaut  $Z_6^8$  après rien que des "up"? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance  $T = 8$  est "above par"; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle?

$$Z_8^8 =$$

$$Z_0^8 = \quad =$$

$$\text{Après deux "up" et deux "down" } Z_4^8 =$$

$$\text{Après rien que des "up" } Z_6^8 =$$

L'existence de situation où comme celle envisagée ci-dessus pour  $Z_6^8$  surprend car elle signifie que ...

4. **Taux actuariels** : On appelle taux actuariel d'un zéro-coupon le taux noté  $A_t^T$  (ou  $a(t, T)$ ) tel que

$$Z_t^T (1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour  $t < T$ .

- (a) Calculer  $A_t^T$  en fonction de  $Z_t^T$ . Que constatez-vous pour  $t = T$ ?

- (b) Définir une fonction  $A(\mathbf{n}, j, \mathbf{k})$  correspondant au zéro-coupon  $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$  quand  $J_{n\delta t}(\omega) = j$ , qui est lui de valeur  $Z(\mathbf{n}, j, \mathbf{k})$ .

- (c) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de  $A_t^T$  aux deux valeurs  $A_{t+\delta t}^T$  pouvant lui succéder dans ce modèle.

- (d) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour  $Z_6^8$  dans la question précédente.