Corrigé

Université de Nice
EPU-Nice

Année 2009-2010
MMDFA

# Calcul stochastique : TP 8
# Etude du modèle de Ho et Lee

Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon $Z_t^T$, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$, où $Z_t^T$ désigne la valeur à la date $t$ d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date $T$. On a donc $Z_T^T = 1$ pour n'importe quel $T \in \mathbb{T}$. C'est un modèle probabiliste sur un ensemble $\Omega$ servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ servant à coder l'information disponible à la date $t \in \mathbb{T}$. En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a. $(X_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$, $\mathbb{T}^* :=]0..T]_{\delta t}$, $X_t \in \{0, 1\}$, les $X_t$ de même loi $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$, $\mathcal{F}_t$-mesurables, et indépendantes de $\mathcal{F}_{t-\delta t}$Pour tout $t \in \mathbb{T}^*$, on pose $J_t := \sum_{s \in ]0..t]_{\delta t}} X_s$ et on note $n$ et $k$, $n \leq k$, les entiers tels que $t = n\delta t$ et $T = k\delta t$. La caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les zéros coupons $Z_t^T(\omega)$ appartiennent à un arbre binaire recombinant, c'est-à-dire que, $Z_{n\delta t}^T(\omega)$ ne prend que $n+1$ valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur $j = J_{n\delta t}(\omega)$. Pour $0 \leq j (= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$, nous noterons $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ `:=Z(n,j,k)`.

1. Pourquoi a-ton `Z(k,j,k)`$= 1$ ?

On a $Z(k,j,k) = Z_{k\delta t}^{k\delta t} = 1$ pour tout $j \leq n = k$.

2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t} \eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction $\eta$ définie par le choix[1] d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in ]0, 1[$, le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Les valeurs des $Z_0^T$, $T \in \mathbb{T}$, peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$.
Calculer $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$ pour tout $\theta$ et $t$ dans $\mathbb{T}^*$, et où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t)) &= \pi\, \eta(\theta,0) + (1-\pi)\, \eta(\theta,1) \\ &= \eta(\theta,0)\left[\pi + (1-\pi)\, \delta^{\frac{T-t}{\delta t}}\right] \\ &= \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \cdot \left[\pi + (1-\pi)\, \delta^{\frac{T-t}{\delta t}}\right] = 1.\end{aligned}$$

3. Voici une implantation du modèle pour lequel on a $T_{\max} = N$ (et donc $\delta t = 1$=`delta_t`), $t$ =`n*delta_t`, $T$ =`k*delta_t`, $J_t(\omega)$ =`j`, $T - t$ =`l*delta_t`, $T$ =`k*deltat_t`, $\eta(T - t, X_t(\omega))$ =`eta(l*delta_t,x)`, pour `x`= $X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =`Z(n,j,k)`, pour $J_t(\omega)$ =`j`, avec les choix $\pi$ =`pi :=0.5`, et $\delta$ =`delta :=1.01`.

[1] C'est le choix $\delta (= \eta(\delta t, 1)/\eta(\delta t, 0)) > 1$ qui exprime qu'un $X_t(\omega) = 1$ code un "*up*" et $X_t(\omega) = 0$ code un "*down*"

```
// Modèle de Ho et Lee
clear;Nmax=8;Tmax=Nmax;delta_t=Tmax/Nmax;
pi=0.5;delta=1.01;r=0.025;
function z0=Z0(k); z0=(1+r)^(-k*delta_t); endfunction;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax));
//
function ee=eta(l,x);
if x==0
ee=(1^l)./(pi+(1-pi)*delta^l);
else ee=delta^l./(pi+(1-pi)*delta^l);
end;
endfunction;
// représentation des eta extrèmes
xset("window",1);clf(1);
Nprime=1000;for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)); end;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1);
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k);
end;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1);
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1);
end;
end;
end;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1);
endfunction;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2);clf(2);
N=Nmax;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N),'-b'); end;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1);
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N);
end;
plot(n1 :N,Vecteur,'--r');
end;
xs2gif(2,'arbHoLee.gif');xs2eps(2,'arbHoLee.eps');xs2fig(2,'arbHoLee.fig');
```

(a) Comment a été choisie la fonction $T \mapsto Z_0^T$ constituée par les valeurs initiales de $Z_t^T$ ?

$$Z_0^T = Z_{0\,\delta t}^{k\,\delta t} = Z(0,0,k) = (1+r)^\wedge(-k\,\delta t) = (1+r)^{-T}$$

Le taux d'intérêt annuel est donc $r$ pour n'importe quelle durée $T$.

(b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de $Z^8$ : que vaut $Z_8^8$ ? Que vaut $Z_0^8$ et retrouver cette valeur sur la courbe `StructureParTermesInitiale` ? Que vaut $Z_4^8$ après deux "*up*" et deux "*down*" ? Que vaut $Z_6^8$ après rien que des "*up*" ? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance $T = 8$ est "*above par*" ; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle ?

$Z_8^8 =$ 1 par définition du zero-coupon $Z_8^8 = Z_T^T = 1$

$Z_0^8 =$ $Z(0,0,8) = 0.8534904$

Après $\underbrace{\text{deux "up"}}_{j=2}$ et deux "*down*" $Z_4^8 =$ $Z(4,2,8) = 0.9225660$

Après $\underbrace{\text{rien que des "up"}}_{j=6}$ $Z_6^8 =$ $Z(6,6,8) = 1.0192401$

L'existence de situation où comme celle envisagée ci-dessus pour $Z_6^8$ surprend car elle signifie que ... dans ce cas les taux d'intérêts sont négatifs : il faut payer 1.92401% pour être sûr de retrouver 1 après deux ans.

4. **Taux actuariels :** On appelle taux actuariel d'un zéro-coupon le taux noté $A_t^T$ (ou $a(t,T)$) tel que

$$Z_t^T(1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1. \qquad (*)$$

Il n'est donc défini que pour $t < T$.

(a) Calculer $A_t^T$ en fonction de $Z_t^T$. Que constatez-vous pour $t = T$ ?

$$(*) \Leftrightarrow \left(1+A_t^T\right)^{\frac{T-t}{\delta t}} = \frac{1}{Z_t^T} \Leftrightarrow 1 + A_t^T = \left(\frac{1}{Z_t^T}\right)^{\frac{\delta t}{T-t}}$$

si $T-t \neq 0$.

$$\Leftrightarrow A_t^T = \left(Z_t^T\right)^{-\frac{\delta t}{T-t}} - 1.$$

On constate que si $t=T$ $Z_t^T(1+A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = Z_T^T(1+A_T^T)^0 = Z_T^T = 1$

Donc $(*)$ est satisfait quelque soit la manière de choisir $A_T^T$ qui n'est donc pas caractérisé par $(*)$

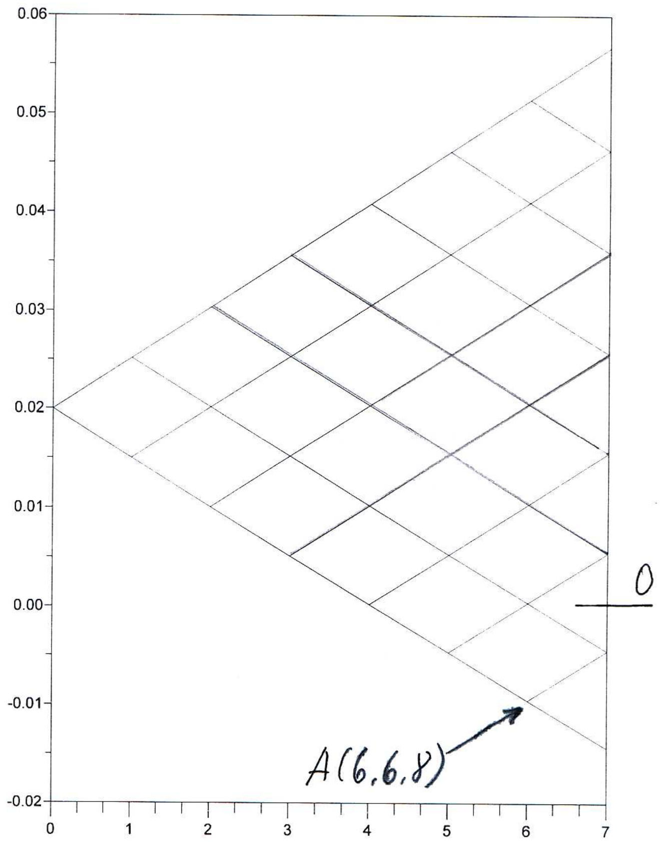
(b) Définir une fonction `A(n,j,k)` correspondant au zéro-coupon $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ quand $J_{n\delta t}(\omega) = j$, qui est lui de valeur `Z(n,j,k)`.

$(*) \Leftrightarrow Z(n,j,k)(1+A(n,j,k))\hat{}((T-t)/\delta t) = 1$ or $\frac{T-\delta t}{\delta t} = \frac{(k-n)\delta t}{\delta t} = k-n$.

$$\Leftrightarrow A(n,j,k) = \left(Z(n,j,k)\right)^{-\frac{\delta t}{T-t}} - 1 = Z(n,j,k)\hat{}(-1/(k-n)).$$

```
function A = A(n,j,k);
   A = Z(n,j,k)^(1/(n-k)) - 1
endfunction;
```

(c) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de $A_t^T$ aux deux valeurs $A_{t+\delta t}^T$ pouvant lui succéder dans ce modèle.




(d) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour $Z_6^8$ dans la question précèdente.

On voit que $A(6,6,8)$ est négatif comme indiqué lorsqu'on a observé que $Z(6,6,8) > 1$