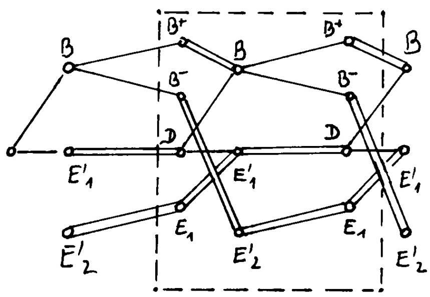
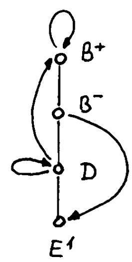
Université de Nice — Année 2011-2012
Nice-Polytech — MMDFA
NOM : — Date : .
PRENOM : — Groupe : .

Feuille-réponses du TD 12
Modèle de Tedeschi avec période d'exclusion

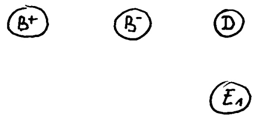
Exercice 1. : modèle de Tedeschi, avec unique risque On considère un modèle de Tedeschi simplifié, avec T temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour T périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B. On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité α de rembourser son prêt : dans cas contraire il est exclu pour T périodes.

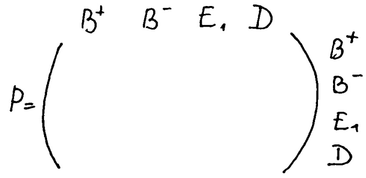
1. Notons $\mathcal{E} = \{B^+, B^-, E_{T-1}, \ldots, E_k, \ldots, E_2, E_1, D\}$ et $\mathcal{E}' = \{B, E'_T, \ldots, E_k, \ldots, E'_2, E'_1\}$ Il vous est donné ci-dessous un arbre indiquant, de gauche à droite, les transitions d'état de probabilité de passage non nulle des états $\mathcal{E}$ aux états $\mathcal{E}'$ et à nouveau aux états $\mathcal{E}$. Que représentent les segment doubles ? Indiquer les probabilités des autres transitions représentées par les flèches du diagramme à gauche et compléter le diagramme de Markov correspondant des états $\mathcal{E}$, dans le cas $T = 2$. Refaire le diagramme de Markov pour les états $\mathcal{E}'$.





2. Toujours pour $T = 2$ refaire le diagramme de la chaîne de Markov à quatre états $\{B^+, B^-, E_1, E_0\}$ correspondant à ce modèle dans la présentation ci-dessous. Ecrire la matrice de *passage* P (ou de *transition*) de cette chaîne.





3. Vérifier que $(\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha))$ est un vecteur propre[1] à gauche de cette matrice. En déduire la distribution d'équilibre π^* de cette chaîne de Markov.

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, P^n tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π^*. Application numérique : choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$; calculer π^* et P^{50}.

2.- On distingue à présent à nouveau deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour T périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt. La probabilité qu'un bénéficiare tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β.

1. On choisit à nouveau $T = 2$ Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a six états $\{B_S^+, B_S^-, E_0, E_1, B_R^-, B_R^+\}$ correspondant à ce modèle ; en vous inspirant du diagramme de l'exercice 1.2 adopter une disposition symétrique des S et R par rapport à un axe pourtant les E.

[1] On obtient facilement un tel vecteur propre par la commande suivante de `Maple` :
`with(linalg) ;`
P := matrix(4,4, [alpha,1-alpha,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,alpha*gamma,(1-alpha)*gamma,0,1-gamma]) ;
`vcps :=eigenvectors(transpose(P)) ;`
à noter que `eigenvectors` fournit les vecteurs propres à *doite ;* il suffit donc de considérer la matrice transposée pour trouver les vecteurs propres à gauche, puisque ${}^t(\pi P) = {}^tP^t\pi$.

2. Ecrire la matrice de passage Q de cette chaîne.

3. Application numérique : $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.50$ et $\gamma = 0.3$; calculer Q^{50}. La matrice Q est-elle primitive ? Donner sa première colonne ; qu'observez-vous ? Quelle est la distribution d'équilibre π^* de cette chaîne.