Université de Nice
EPU-Nice
NOM :
PRENOM :

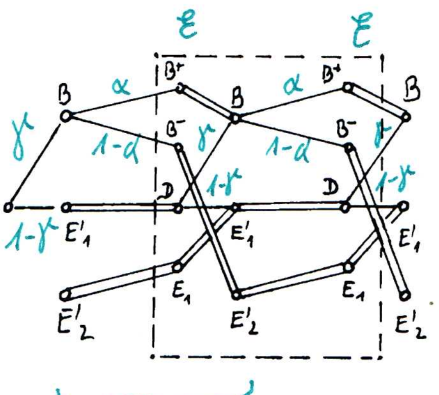
Date :
Groupe :

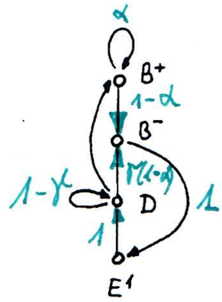
Année 2009-2010
MMDFA

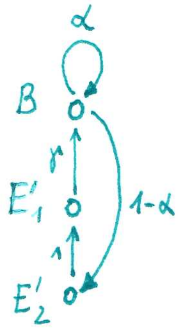
Feuille-réponses du TD 12
Modèle de Tedeschi avec période d'exclusion

Exercice 1. : modèle de Tedeschi, avec unique risque On considère un modèle de Tedeschi simplifié, avec T temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour T périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B. On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité α de rembourser son prêt : dans cas contraire il est exclu pour T périodes.

1. Notons $\mathcal{E} = \{B^+, B^-, E_{T-1}, \ldots, E_k, \ldots, E_2, E_1, D\}$ et $\mathcal{E}' = \{B, E'_T, \ldots, E_k, \ldots, E'_2, E'_1\}$ Il vous est donné ci-dessous un arbre indiquant, de gauche à droite, les transitions d'état de probabilité de passage non nulle des états $\mathcal{E}$ aux états $\mathcal{E}'$ et à nouveau aux états $\mathcal{E}$. Que représentent les segment doubles ? Indiquer les probabilités des autres transitions représentées par les flèches du diagramme à gauche et compléter le diagramme de Markov correspondant des états $\mathcal{E}$, dans le cas $T = 2$. Refaire le diagramme Markov pour les états $\mathcal{E}'$

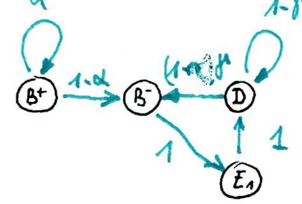






$\mathcal{E}'$.

2. Toujours pour $T = 2$ refaire le diagramme de la chaîne de Markov à quatre états $\{B^+, B^-, E_1, E_0\}$ correspondant à ce modèle dans la présentation ci-dessous. Ecrire la matrice de *passage* P (ou de *transition*) de cette chaîne.



$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} B^+ & B^- & E_1 & D \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha\gamma, & (1-\alpha)\gamma, & 0, & 1-\gamma \end{pmatrix} \begin{array}{c} B^+ \\ B^- \\ E_1 \\ D \end{array}$$

3. Vérifier que $(\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha))$ est un vecteur propre[1] à gauche de cette matrice. En déduire la distribution d'équilibre π^* de cette chaîne de Markov.

Il suffit d'effectuer le produit du vecteur $V = (\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha))$ avec P. On obtient

$$VP = (\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, 1-\alpha)\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha\gamma & (1-\alpha)\gamma & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha^2\gamma + (1-\alpha)\alpha\gamma, \alpha\gamma(1-\alpha) + (1-\alpha)^2\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma + (1-\alpha)(1-\gamma))$$

$$= (\alpha\gamma, (1-\alpha)\gamma(\alpha+1-\alpha), (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)(\gamma+1-\gamma)) = (\alpha\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, 1-\alpha) = V = 1\cdot V$$

Donc V est un vecteur propre (vcp) associé à la valeur propre 1.
Les coefficients de ce vecteur sont positifs mais leur somme est différente de 1.
On sait que tout multiple non nul d'un v.cp est encore un vcp. Posons $\mu = \frac{1}{\alpha\gamma + 2(1-\alpha)\gamma + 1-\alpha} = \frac{1}{\gamma(2\gamma-\alpha)+1-\alpha}$
Donc $\pi^* := \mu V$ est la distribution cherchée.

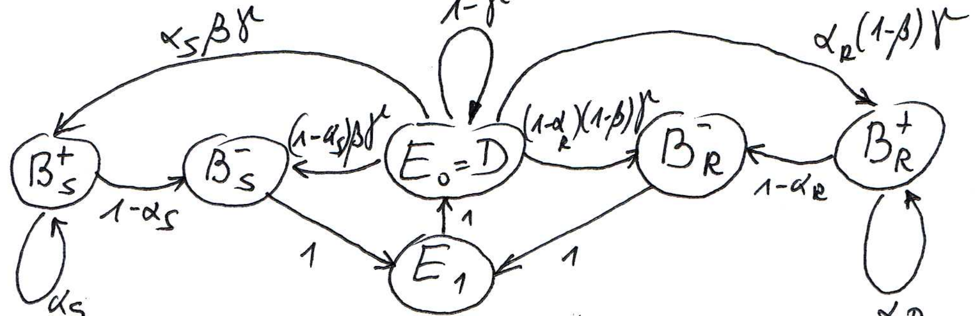
4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, P^n tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π^*. Application numérique : choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$; calculer π^* et P^{50}.

Un calcul avec Scilab montre facilement que $\pi^* = (0.6923077, 0.0769231, \text{idem}, 0.1538462)$

et $P^{50} = \begin{pmatrix} 0.69\ldots & 0.07\ldots & 0.07\ldots & 0.15\ldots \\ \text{———} & & " & \text{———} \\ \text{———} & & " & \text{———} \\ \text{———} & & " & \text{———} \end{pmatrix}$

2.- On distingue à présent à nouveau deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour T périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt. La probabilité qu'un bénéficiare tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β.

1. On choisit à nouveau $T = 2$ Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a six états $\{B_S^+, B_S^-, E_0, E_1, B_R^-, B_R^+\}$ correspondant à ce modèle ; en vous inspirant du diagramme de l'exercice 1.2 adopter une disposition symétrique des S et R par rapport à un axe pourtant les E.



[1]On obtient facilement un tel vecteur propre par la commande suivante de `Maple` :
```
with(linalg) ;
P := matrix(4,4, [alpha,1-alpha,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,alpha*gamma,(1-alpha)*gamma,0,1-gamma]) ;
vcps :=eigenvectors(transpose(P)) ;
```
à noter que `eigenvectors` fournit les vecteurs propres à *doite ;* il suffit donc de considérer la matrice transposée pour trouver les vecteurs propres à gauche, puisque ${}^t(\pi P) = {}^tP^t\pi$.

2. Ecrire la matrice de passage Q de cette chaîne.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & B^+_S & B^-_S & E_1 & D=E_0 & B^+_R & B^-_R & \\
\left(\right. & \alpha_S & 1-\alpha_S & 0 & 0 & 0 & 0 & \left.\right) B^+_S \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B^-_S \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & E_1 \\
 & \alpha_S\beta\gamma & (1-\alpha_S)\beta\gamma & 0 & 1-\gamma & \alpha_R(1-\beta)\gamma & (1-\alpha_R)(1-\beta)\gamma & D \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_R & 1-\alpha_R & B^+_R \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B^-_R
\end{array}
$$

3. Application numérique : $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.50$ et $\gamma = 0.3$; calculer Q^{50}. La matrice Q est-elle primitive ? Donner sa première colonne ; qu'observez-vous ? Quelle est la distribution d'équilibre π^* de cette chaîne.

Après calcul avec Scilab on observe que tous les coefficients de Q^{50} sont non nuls (en fait strictement positifs). Par définition, comme il existe une puissance $k (=50)$ telle que P^k a tous ses coef non nuls la matrice P est donc bien primitive.

La première colonne de P^{50} vaut $\begin{pmatrix} 0.2797524 \\ 0.2733982 \\ 0.2734687 \\ 0.2735328 \\ 0.2709588 \\ 0.273392 \end{pmatrix}$

Ses coefficients ne sont pas tous identiques : avec une puissance 50 on n'est pas encore assez proche de la limite (distribution d'équilibre). En calculant Q^{500} on trouve une matrice ... toutes les lignes sont identiques (pour les décimales affichées) : on trouve ainsi que

$\pi^* = (0.2797\ldots, 0.0243\ldots, 0.0792, 0.1584.., 0.4031.., 0.0549..)$