Université de Nice — Année 2009-2010
EPU-Nice — MMDFA
NOM : — Date : .
PRENOM : — Groupe : .

**Feuille-réponse de l'épreuve finale**
**27 Mai 2010, 10 :30-12 :30**

**Exercice 1. : La marche Cox-Ross-Rubinstein** On rappelle que la marche CRR $S_t$ est définie par sa valeur initiale $S_0$ et la relation $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up},\texttt{down}\}$. On choisira ici $up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où $\sigma$ est la volatilité de l'actif qu'on suposera égale à 35% et $n$ le nombre d'étapes, $T = n\delta t$.

1. En supposant que $S_0 = 100$, $n = 10$ et $T = 1$, calculer au moyen de Scilab toutes les valeurs de $S_t$ à l'instant $t = 2\delta t$.

2. Pour les mêmes valeurs de $S_0$, $n$ et $T$, quelle sera la valeur à l'instant final après 5 up ? Expliquez.

3. On rappelle que $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ est la "valeur actualisée" de $S_t$. Calculer avec Scilab ces valeurs pour $r = 18\%$ en gardant les mêmes valeurs de $S_0$ et $n$. Quelles valeurs extrémales (minimale et maximale) trouvez-vous pour $\tilde{S}_t$ à l'instant final ?

**Exercice 2. : Simulation**

1. La fonction `int(0.25+rand())` renvoie un nombre aléatoire distribué selon une loi de probabilité. Quelle est cette loi ? Expliquer.

2. Simuler 50 nombres distribués selon cette loi puis faire un histogramme avec 5 classes. Ecrire les deux instructions Scilab qui permettent de le faire.

**Exercice 3. : Calcul de prix d'une option européenne et américaine** On reprend les données de l'exercice 1.

On sait que le prix $C(t, S_t)$ d'une option Call Européenne sur l'actif sous-jacent $S_t$ ayant pour pay-off $\varphi(S) = (S-K)^+$ et de date d'exercice $T$ peut se calculer par récurence rétrograde : à l'instant $T$, on a $C(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis, pour tous les $0 \leq t \leq T - \delta t$, on pose $C(t, S_t) = (pC(t + \delta t, S_t u) + (1 - p)C(t + \delta t, S_t d))/R$ où $p = \frac{R-d}{u-d}$ est la probabilité risque neutre et $R = e^{r\delta t}$ le coefficient d'actualisation pour un pas de temps $\delta t$.

1. Calculer ce prix avec Scilab pour $K = 110$ puis pour $K = 90$. Expliquez la différence.

2. On rappelle que la part du portefeuille de couverture à investir en actif sous-jacent, appelée le *delta de couverture* est égale à $\alpha = \frac{C^+-C^-}{S^+-S^-} = \frac{C(\delta t,S_0u)-C(\delta t,S_0d)}{S_0u-S_0d}$. Calculer, pour $K = 90$, quelle part du portefeuille de couverture est à investir dans l'actif sous-jacent et quelle part est à investir en actif non risqué.

3. On a vu que pour obtenir le prix d'une option Américaine, il suffit de remplacer, dans la formule du prix de l'option Européenne correspondante, la relation de récurrence $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$ par la relation $C_t^{Amer} = \text{Max}\{\phi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}^{Amer}/\mathcal{F}_t)\}$. Utiliser cette propriété pour calculer les prix du Put américain à la monnaie puis calculer celui du Put Européen de même échéance et expliquer la différence.

**Exercice 4. : Modèle de Ho et Lee**

1. Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon $Z_t^T$, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t \ := T_{\max}/N$, $t \leq T$. Préciser ce que représente $Z_t^T$.

2. Dans la pratique, comment sont choisies les valeurs des $Z_0^T, T \in \mathbb{T}$,et que représentent-elles ?

3. Nous avons montré que le modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :
$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t}\eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$
pour une fonction $\eta$ définie par le choix d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in ]0,1[$, le modèle retenu, définie par
$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$
Calculer $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$ pour tout $\theta$ et $t$ dans $\mathbb{T}^*$, et où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.

**Exercice 5. : Modèle de microcrédit**

Une institution de microfinance accorde un prêt de 10000 Euros à un micro entrepreneur en lui demandant de rembourser 310 Euros par mois pendant 36 mois en commençant les remboursements après un mois.

1. Poser $q = e^{-\frac{r}{12}}$ et indiquer quelle est l'équation polynômiale satisfaite par $q$.

2. Résoudre cette équation avec Scilab et en déduire le taux annuel $r$ pratiqué.

3. On considère un modèle de Tedeschi à trois états : $D$ (demandeur) ou $B$ (bénéficiaire) et $E$ (exclu du prêt). Un demandeur devient bénéficiaire avec une probabilité $\gamma$ ; un bénéficiaires risque, avec une probabilité $1-\alpha$, de ne pouvoir rembourser et est alors exclu pour une période avant de redevenir demandeur avec probabilité 1 la période suivante. Donner le diagramme en points et flèches de cette chaîne de Markov a trois états $D$, $B$ et $E$ et sa matrice de transition $Q$ entre ces états, rangés dans cet ordre ?

4. Calculer avec Scilab la proportion à l'équilibre de demandeurs $D$, de bénéficiaires $B$ et d'exclus $E$ si $\alpha = 95\%$ et $\gamma = 10\%$ ? Indiquez comment vous l'avez calculée.

5. Etudiez comment varient ces proportions lorsque vous modifiez la valeur de $\alpha$ et commentez vos observations. Même question en faisant varier $\gamma$.