Université de Nice
EPU-Nice
NOM :
PRENOM :

Année 2009-2010
MMDFA

Date :
Groupe :

Feuille-réponse de l'épreuve finale
27 Mai 2010, 10 :30-12 :30

Exercice 1. : La marche Cox-Ross-Rubinstein On rappelle que la marche CRR S_t est définie par sa valeur initiale S_0 et la relation $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\mathtt{up}, \mathtt{down}\}$. On choisira ici $up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où σ est la volatilité de l'actif qu'on suposera égale à 35% et n le nombre d'étapes, $T = n\delta t$.

1. En supposant que $S_0 = 100$, $n = 10$ et $T = 1$, calculer au moyen de Scilab toutes les valeurs de S_t à l'instant $t = 2\delta t$. Pour $t = 2\delta t$ il y a trois valeurs de $S_{2\delta t}$

   SS(3,1) = 80,142857   SS(3,2) = 100   SS(3,3) = 124,7718

2. Pour les mêmes valeurs de S_0, n et T, quelle sera la valeur à l'instant final après 5 up ? Expliquez. La valeur de S_T pour $j = 5$ est $SS(n+1, j+1) = SS(11,6)$

   SS(11,6) = 100 : il y a 5 up donc aussi 5 down : on revient à S_0

3. On rappelle que $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ est la "valeur actualisée" de S_t. Calculer avec Scilab ces valeurs pour $r = 18\%$ en gardant les mêmes valeurs de S_0 et n. Quelles valeurs extrémales (minimale et maximale) trouvez-vous pour $\tilde{S}_t$ à l'instant final ?

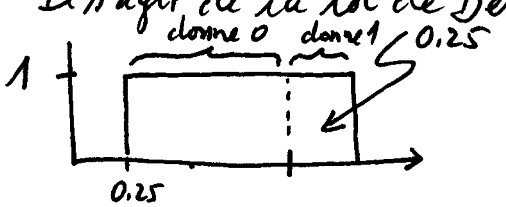
   $\tilde{S}_T = \tilde{S}_1 = S_1 e^{-r} = SS(10+1, j+1) * exp(-r)$ $j = 0 \to \tilde{S}_T = SS(11,1) = 27,615384$

   $j = 10 \to \tilde{S}_T = SS(11,11) = 252,64046$

Exercice 2. : Simulation

1. La fonction `int(0.25+rand())` renvoie un nombre aléatoire distribué selon une loi de probabilité. Quelle est cette loi ? Expliquer.

   Il s'agit de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 0.25)$

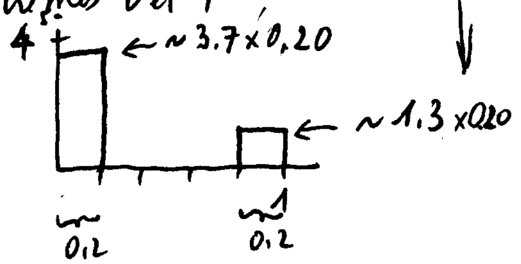
   rand( ) simule une loi uniforme sur [0,1], donc 0.25+rand( ) simule une loi uniforme sur [0.25, 1.25) qui donne un nombre entre 1 et 1.9999.. dans 25% des cas.

2. Simuler 50 nombres distribués selon cette loi puis faire un histogramme avec 5 classes. Ecrire les deux instructions Scilab qui permettent de le faire.

   x = int(0.25+rand(1,50))   50 colonnes   1 ligne

   histplot(5, x)   5 classes entre les extrêmes 0 et 1

   proportions observées

Exercice 3. : Calcul de prix d'une option européenne et américaine On reprend les données de l'exercice 1.

On sait que le prix $C(t, S_t)$ d'une option Call Européenne sur l'actif sous-jacent S_t ayant pour pay-off $\varphi(S) = (S-K)^+$ et de date d'exercice T peut se calculer par récurence rétrograde : à l'instant T, on a $C(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis, pour tous les $0 \leq t \leq T - \delta t$, on pose $C(t, S_t) = (pC(t+\delta t, S_t u) + (1-p)C(t+\delta t, S_t d))/R$ où $p = \frac{R-d}{u-d}$ est la probabilité risque neutre et $R = e^{r\delta t}$ le coefficient d'actualisation pour un pas de temps δt.

1. Calculer ce prix avec Scilab pour $K = 110$ puis pour $K = 90$. Expliquez la différence.

Pour $K=110$ $CC(0+1, 0+1) = 17.960381$

pour $K=90$ $CC(0+1, 0+1) = 28.508439$

On a $(S_T - 110)^+ \leq (S_T - 90)^+$

ceci explique que $C_{K=110} \leq C_{K=90}$.

2. On rappelle que la part du portefeuille de couverture à investir en actif sous-jacent, appelée le *delta de couverture* est égale à $\alpha = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = \frac{C(\delta t, S_0 u) - C(\delta t, S_0 d)}{S_0 u - S_0 d}$. Calculer, pour $K = 90$, quelle part du portefeuille de couverture est à investir dans l'actif sous-jacent et quelle part est à investir en actif non risqué.

$\alpha = 0.8302873$ Cette quantité d'action coûte $\alpha \cdot S_0 = 83.028728$

On a touché 28.508439 : la différence est investie en non risqué (elle est négative, c'est donc un emprunt)

En non risqué : $28.508439 - 83.028728 = -54.520289$

3. On a vu que pour obtenir le prix d'une option Américaine, il suffit de remplacer, dans la formule du prix de l'option Européenne correspondante, la relation de récurrence $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$ par la relation $C_t^{Amer} = \text{Max}\{\phi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}^{Amer}/\mathcal{F}_t)\}$. Utiliser cette propriété pour calculer les prix du Put américain à la monnaie puis calculer celui du Put Européen de même échéance et expliquer la différence.

Put americain 8.0438797

Put européen 5.7927308

Le put americain donne droit à $(K-S)^+$ à n'importe quel moment $t \leq T$ alors que le put européen ne donne ce droit que pour $t = T$

Par arbitrage $P^{Amer} \geq P^{Europ.}$

Exercice 4. : Modèle de Ho et Lee

1. Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$. Préciser ce que représente Z_t^T.

Par définition Z_t^T représente la valeur à la date $t \leq T$ d'un euro (ou de tout autre numéraire choisi) disponible à la date T. Si les taux d'intérêts à la date t sont positifs. alors $Z_t^T \leq 1$

2. Comment sont choisies les valeurs des Z_0^T, $T \in \mathbb{T}$,et que représentent-elles ?

Dans le modèle de Ho et Lee Z_0^T est arbitraire : en pratique on le fixe à l'aide des taux d'intérêts pratiqués à la date 0 dans l'organisme pour lequel on utilise le modèle.

3. Nous avons montré que le modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t}\eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction η définie par le choix d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0, 1[$, le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Calculer $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$ pour tout θ et t dans $\mathbb{T}^*$, et où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.

On sait que $\pi = \mathbb{P}^*(\{X_t = 0\})$. Donc

$$\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t)) = \eta(\theta,0) \cdot \pi + \eta(\theta,1)(1-\pi) = \eta(\theta,0)\left[\pi + \delta^{\frac{T-t}{\delta t}}(1-\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}}\left[\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}\right] = 1$$

Exercice 5. : Modèle de microcrédit

Une institution de microfinance accorde un prêt de 10000 Euros à un micro entrepreneur en lui demandant de rembourser 310 Euros par mois pendant 36 mois en commençant les remboursements après un mois.

1. Poser $q = e^{\frac{-r}{12}}$ et indiquer quelle est l'équation polynômiale satisfaite par q.

$$10.000 = \sum_{k=1}^{36} 310\, e^{-r \cdot \frac{k}{12}} = 310 \sum_{k=1}^{36} q^k = 310\, q \frac{1-q^{36}}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow 10.000(1-q) = 310\, q(1-q^{36})$$

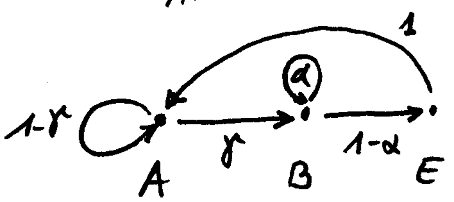
$$\Leftrightarrow +310\, q^{37} - 10310\, q + 10.000 = 0$$

2. Résoudre cette équation avec Scilab et en déduire le taux annuel r pratiqué.

On trouve $q = 0,9939794$ (seule racine réelle positive < 1)

D'où $r = -12 \log(q) = 7,24656\%$.

3. On considère un modèle de Tedeschi à trois états : A (demandeur) ou B (bénéficiaire) et E (exclu du prêt). Un demandeur devient bénéficiaire avec une probabilité γ ; un bénéficiaires risque, avec une probabilité $1-\alpha$, de ne pouvoir rembourser et est alors exclu pour une période avant de redevenir demandeur avec probabilité 1 la période suivante. Donner le diagramme en points et flèches de cette chaîne de Markov a trois états A, B et E et sa matrice de transition Q ?



$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & E \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ E \end{array} \end{array}$$

4. Calculer avec Scilab la proportion à l'équilibre de demandeurs A, de bénéficiaires B et d'exclus E si $\alpha = 95\%$ et $\gamma = 10\%$? Indiquez comment vous l'avez calculée.

A l'équilibre $\pi = \pi^* = (\pi_A, \pi_B, \pi_E) = (0,322.., 0,645.., 0,032..)$
On sait que $Q^n \to \begin{pmatrix} \pi^* \\ \pi^* \\ \pi^* \end{pmatrix}$. On observe que les lignes de Q^{100} ont des valeurs indistinguables : elles constituent l'approximation de π^* donnée

5. Etudiez comment varient ces proportions lorsque vous modifiez la valeur de α et commentez vos observations. Même question en faisant varier γ.

- Si on réduit α à 90% on trouve $\pi^*_{\alpha=0.9} = (0.476.., 0.476.., 0,047..)$
on observe que la proportion d'exclus augmente : plus d'échecs donc plus d'exclus. • Il semble que si $\alpha = 1-\gamma$, on a $\pi_A = \pi_B$.
Ceci se confirme pour $\alpha = 0.95 = 1-\gamma$. On devrait essayer de le démontrer
- Avec $\alpha = 95\%$ et $\gamma = 15\%$ on obtient $\pi^* = (0,241.., 0,273, 0,036)$
on observe que si les chance de passer Beneficiaire lorsqu'on est A = Demandeur augmentent la proportion d'exclus augmente de 3,2% à 3,6%
Il semble que si γ est proche de 1, $\pi_E \sim 1-\alpha$