NOM : Date :
PRENOM : Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 2
Modèle dynamique pour deux espèces en compétition

Le système de Lotka-Volterra nous a permis de modèliser la dynamique de deux populations présentant une relation de type proies-prédateurs. Nous allons à présent modéliser la dynamique de *deux populations en compétition*, par exemple parce qu'elles partagent la même nourriture ou le même territoire. Notre objectif est d'étudier les possibilités de coexistence de ces deux populations. On choisit de faire les hypothèses suivantes :

- En l'absence de l'autre espèce, chacune des deux espèces suit un modèle logistique ($x' = (\alpha_1 - \beta_1 x)x$ et $y' = (\alpha_2 - \beta_2 y)y$).
- le taux de mortalité supplémentaire pour chacune des espèces dû à la présence de l'autre espèce est proportionnel à la fois à la taille de l'une et de l'autre des deux populations (et donc proportionel à leur produit).

Sous ces hypothèses, le système peut s'écrire :

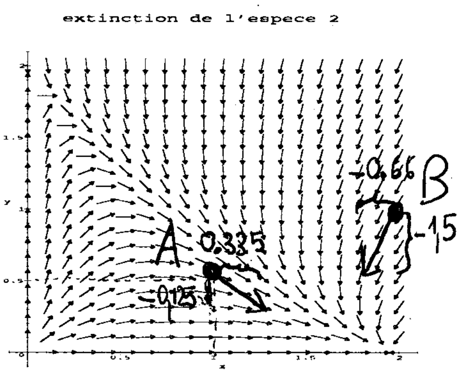
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (\alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_{12} y)x \\ y' & = & (\alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_{21} x)y \end{array} \right. \tag{1}$$

où les constantes α_1, α_2, β_1, β_2, γ_{12}, et γ_{21} sont supposées positives.

L'exemple suivant de dynamique de deux populations en compétition illustre ce que l'on appelle le *principe d'exclusion compétitive.* Voici son système différentiel et,plus bas, son champs de vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (1 - 0.5x - 0.33y)x \\ y' & = & (1 - x - 0.5y)y \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Calculer les coordonnées (x', y') du vecteur de ce champs de vecteurs situé au point $A = (1, 0.5)$ et vérifier sa direction sur la figure. Même question pour celui du point $B = (2, 1)$.



Au point $A = (1, 0.5)$ $x' = (1 - 0.5(1) - 0{,}33(0.5))1$
$= 0{,}335 > 0$
et $y' = (1 - 1 - (0.5)^2)0.5$
$= -0{,}125 < 0$

Au point $B = (2, 1)$, on a
$x' = (1 - 0.5(2) - 0.33(1))2$
$= -0.66 < 0$
et $y' = (1 - 2 - 0.5(1))(1)$
$= -1{,}5 < 0$

On vérifie que le sens des flèches calculées est le même que celles de la figure.

2. Calculer les équations de deux droites qui sont les isoclines $x' = 0$ du système (2).

$x' = 0 \iff x = 0$ et $1 - (0.5)x - (0.33)y = 0$
$\Updownarrow$
$y = \frac{1}{0.33} - \frac{0.5}{0.33}x = 3 - 1.5x$

Donc les 2 droites sont $\boxed{x = 0}$ et $\boxed{y = -1.5x + 3}$

3. Même question pour les deux isoclines $y' = 0$.

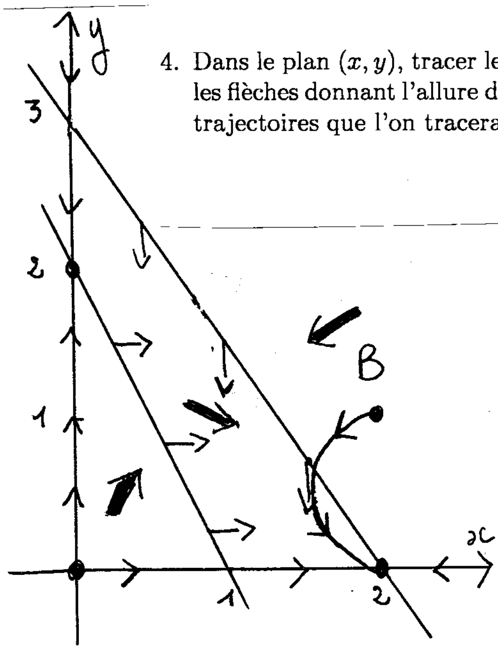
$y' = 0 \iff y = 0$ ou $1 - x - 0.5\,y = 0$

$\Updownarrow$

$y = \frac{1}{0.5} - \frac{1}{0.5}x = 2 - 2x$

Donc les deux droites sont $\boxed{y=0}$ et $\boxed{y = 2 - 2x}$

4. Dans le plan (x, y), tracer les isoclines du système, indiquer dans chaque région (et sur les isoclines) les flèches donnant l'allure du champs de vecteurs. Puis en déduire l'allure approximative de quelques trajectoires que l'on tracera sur le dessin.



Les 2 droites $y = 3 - 1.5x$ et $y = 2 - 2x$ découpe dans le quart de plan $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ trois régions où $\begin{cases} x' \geq 0 \\ y' \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x' \geq 0 \\ y' \leq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' \leq 0 \\ y' \leq 0 \end{cases}$ respectivement. D'où les flèches.

5. Combien le système (2) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées et les repérer sur la figure.

Un équilibre est un point (x, y) où l'on a à la fois $x' = 0$ et $y' = 0$.

Il y a 4 équilibres
$x = 0$ et $y = 2 - 2x \Rightarrow \boxed{x = 0 \quad y = 2}$
$x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \quad y = 0}$
$y = 0$ et $y = 3 - 1.5x \Rightarrow \boxed{x = 2 \quad y = 0}$
$y = 3 - 1.5x$ et $y = 2 - 2x \Rightarrow$ un point en dehors du quadran considéré.

6. Que pensez-vous de l'évolution des deux populations selon ce modèle ? Vont-elles coexister ou l'une d'elles va-t-elle disparaître ? Expliquer.

On voit que, quelque soit le point $\binom{x_0}{y_0}$ initial, sa trajectoire va tendre vers l'équilibre $\binom{2}{0}$ qui correspond à l'extinction de la population $y(t)$. Donc ici, il n'y a pas de coexistence possible, $x(t)$ tend vers 2 et $y(t)$ tend vers 0.

7. Tracer approximativement les deux graphes des composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (2) issue du point B (question 1).

La trajectoire issue de B a sa composante $x(t)$ qui diminue d'abord un peu puis ré augmente jusqu'à 2 et sa composante $y(t)$ qui décroit jusqu'à 0.