NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : .
Groupe : .

**Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 5**
**Le modèle de croissance logistique**

**Exercice 1.** : Une population de bactéries $P(t)$ croît de manière logistique. On suppose que sa taille initiale est de 5mg, que sa capacité biotique est de 100mg et que son taux de croissance intrinsèque est de 0,3mg par heure.

1. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $P(t)$.

$$P'(t) = 0{,}3\, P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{100}\right)$$

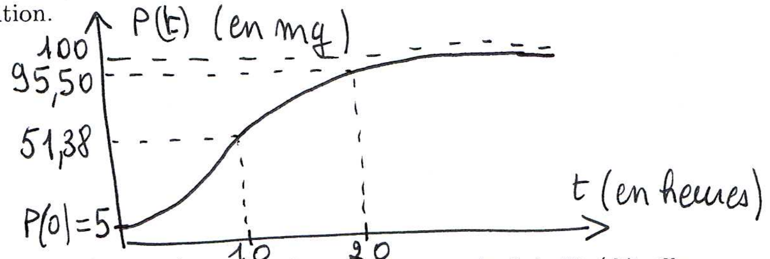
2. La solution de cette équation différentielle correspondant à cette condition initiale est, d'après le cours, de la forme $P(t) = \frac{P(0)K}{P(0)+e^{-rt}(K-P(0))}$. En remplaçant les différentes constantes par leurs valeurs, indiquer de quelle fonction il s'agit ici, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$. Donner, sans calcul, une valeur approchée en $t = 50$.

$$P(t) = \frac{500}{5 + 95\, e^{-0{,}3 t}}$$

$$P(10) = \frac{500}{5+95\, e^{-3}} \simeq 51{,}39 \qquad P(20) = \frac{500}{5+95\, e^{-6}} \simeq 95{,}50$$

Comme $P(t) \rightarrow 100$ quand $t \rightarrow \infty$, $P(50) \approx 100$

3. Esquisser le graphe de cette solution.




4. Calculer le temps nécessaire pour que la population de bactéries passe de 5 à 50 (détailler vos calculs).
On recherche $t$ tel que $P(t) = 50$. On résoud donc l'équation $\frac{500}{5+95e^{-0{,}3t}} = 50$. L'équation s'écrit $10 = 5+95e^{-0{,}3t}$, soit $\frac{1}{19} = e^{-0{,}3t}$. En prenant le log : $\ln 19 = 0{,}3t$, soit $t \simeq 9{,}815$.
Pour passer de 5 à 50, il faudra donc 9 heures et 49 mn environs.

5. Si, au lieu de choisir un modèle logistique pour cette population de bactéries on avait préféré un modèle exponentiel (ou malthusien) au taux de croissance $\frac{P'(t)}{P(t)}$ constant,

$$P'(t) = 0,3P(t)$$

quelle serait, dans ce cas, la fonction $P(t)$[1] ? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$.
C'est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont on connait la solution : $P(t) = P(0)\, e^{0{,}3t} = 5\, e^{0{,}3t}$.

$P(10) = 5e^3 \approx 100{,}43$ $\qquad$ $P(20) = 5e^6 \approx 2017{,}14$.

[1] Ind : on rappelle que la solution d'une équation différentielle linéaire $y' = ay$ de condition initiale $y_0$ est $y(t) = y_0 e^{at}$.