NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Initiation aux équations différentielles

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,05y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation (on pourrait la résoudre en la réécrivant $\frac{dy}{y^2} = 0,1dt$ puis en intégrant les deux termes, mais ce n'est pas demandé ici), que pouvez-vous dire du comportement de cette population à l'avenir si $y(0) = 10$: sera-t-elle croissante, décroissance ?

On voit que $\frac{dy(t)}{dt}$ est toujours positif : elle sera croissante.

2. Vérifier que $y(t) = \frac{20}{1-t}$ est une solution de cette équation. Que vaut cette solution à l'instant initial ?

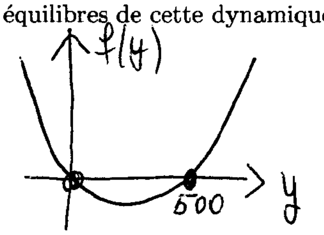
On calcule $\frac{dy(t)}{dt}$ d'une part et $0,05\,y(t)$ d'autre part et on vérifie que ces deux quantités sont égales.

$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{20}{1-t}\right) = \frac{+20}{(1-t)^2}$ $\quad 0,05y^2(t) = 0,05\frac{400}{(1-t)^2} = \frac{20}{1-t^2}$. $\boxed{y(0)=20}$

3. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

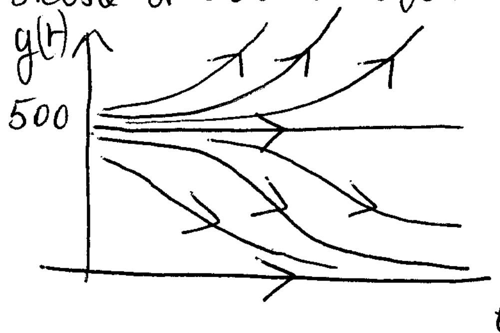
Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définit cette équation et indiquer quels sont les équilibres de cette dynamique.



$f(y) = 0,1\,y(y-500)$
Les équilibres sont les y où f s'annule ici $y=0$ et $y=500$.

Déterminer par un calcul la stabilité de ces équilibres puis esquisser l'allure des solutions $y(t)$.

$f'(y) = 2(0,1)y - 50 = 0,2y - 50$
On calcule la valeur de f' aux points d'équilibre $f'(0) = -50$ et $f'(500) = 50$. Donc 0 est un équilibre stable et 500 un équilibre instable.



← équilibre instable

← équilibre stable (extinction)

Exercice 2. : On considère une population de prédateurs $y(t)$ qui se nourrissent exclusivement de proies celle-ci formant une population notée $x(t)$. On propose le modèle suivant pour la dynamique de la population de prédateurs :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)y(t) - 0.1y(t)$$

1. Décrire la dynamique de la population de prédateurs en l'absence de proies.

L'absence de proie correspond au cas où $x(t) = 0$. La dynamique est dans ce cas $\frac{dy(t)}{dt} = -0,1\, y(t)$. C'est une équation linéaire dont la solution est $y(t) = y(0)\, e^{-0,1 t}$ (modèle malthusien). Quelle que soit sa taille initiale $y(0)$, la population de prédateurs $y(t)$ tend vers 0 (extinction due à l'absence de proies).

2. Expliquer ce que représente le terme $2x(t)y(t)$.

Le terme $2x(t)y(t)$ est le terme d'interaction entre proie et prédateurs. Si $x(t)$ augmente, ce terme augmente et donc $\frac{dy(t)}{dt}$ augmente : l'accroissement de la ressource (les proies) augmente le taux de croissance de la population $y(t)$.

3. Décrire la dynamique de la population de prédateurs lorsque la populations des proies est supposée constante ($x(t) = C$).

Lorsque $x(t) = C$, l'équation s'écrit $\frac{dy(t)}{dt} = (2C - 0,1)\, y(t)$. C'est encore un modèle malthusien mais le taux de croissance est cette fois $2C - 0,1$. Il est positif dès que $2C > 0,1$, dans ce cas la population a une croissance exponentielle. Dans le cas où $2C < 0,1$, elle tend vers 0 (même dynamique qu'en l'absence de proies).

4. Quelle équation pourriez-vous proposer pour modéliser la dynamique de la population de proies ?

En l'absence de prédateurs, les proies ont tendance à proliférer : on peut proposer un modèle malthusien $\frac{dx(t)}{dt} = r x(t)$ ou logistique $\frac{dx(t)}{dt} = r x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$.
En présence de prédateurs, il convient d'ajouter un terme d'interaction, par exemple $-k x(t) y(t)$. Donc

$\frac{dx(t)}{dt} = -k x(t) y(t) - r x(t)$ ou $\frac{dx(t)}{dt} = -k x(t) y(t) - r x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$.