TD 4 et 5 : Chaines de Markov

Exercice 1 : On considère une chaine de Markov à quatre états $S = \{1,2,3,4\}$ dont la matrice de transition est

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe en points et flèches associé à cette chaine de Markov.
2. Calculer les probabilités des trajectoires suivantes en fonction des probabilités initiales de chaque état (p_0, q_0, r_0, s_0) :
   $(X_0 = 1\ ,\ \forall n \geq 1\ \ X_n = 3)$, $(X_0 = 1\ ,\ X_1 = 2\ ,\ \forall n \geq 2\ \ X_n = 4)$,
   ($X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 3$ si n est impair).
3. Montrer que la trajectoire ($X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 2$ si n est impair) est de probabilité nulle.
4. On suppose que la répartition entre les quatre états est uniforme à l'instant initial $t = 0$. Calculer la répartition à l'instant $t = 1$ puis à l'instant $t = 2$.
5. Même question si l'on part d'une distribution initiale $\pi_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.
6. Montrer que toute distribution initiale de la forme $\pi_0 = (0, 0, r_0, s_0)$ avec $r_0 + s_0 = 1$ est une distribution stationnaire. En existe-t-il d'autres ?
7. Dans une telle chaine de Markov, on dit que les états 3 et 4 sont *absorbants*. Expliquer pourquoi.

Exercice 2 : On reprend l'exemple d'une chaine de Markov à trois états $S = \{AA, Aa, aa\}$, de matrice de transition

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ \frac{p}{2} & \frac{1}{2} & \frac{q}{2} \\ 0 & p & q \end{pmatrix}$$

où p (resp. q) est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population fournisse le gène A (resp. le gène a) à son descendant.

1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Vérifier que, dans ce cas, $p = q = \frac{1}{2}$ et en déduire la valeur de la matrice de transition $\mathbb{P}$.
2. Calculer la distribution $\pi_1 = (p_1, q_1, r_1)$ à l'instant $t = 1$ et vérifier qu'elle est stationnaire pour cette chaine de Markov.
3. Reprendre les deux questions précédentes pour $\pi_0 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.
4. Vérifier que, quelque soit π_0, on a $p_1 - r_1 = p_0 - r_0 = \alpha$.
5. Calculer p_1, q_1, r_1 en fonction de α. En déduire p_2, q_2 et r_2.

Exercice 3 : On considère l'évolution d'une population supposée isolée (qui se reproduit sans mutation, ni selection ni immigration). L'effectif génétique de la population est supposée constant et égal à $2N$ gènes. Ces gènes dont de l'un des deux types A ou a et il y a à l'instant initial $t = 0$ X_0 gènes de type a (et donc $2N - X_0$ gènes de type A). On considère que le nombre X_n de gènes de type a à l'instant $t = n$ est une chaine de Markov à $2N + 1$ états

$$S = \{0, 1, \ldots, 2N\}$$

de matrice de transition $\mathbb{P} = (p_{jk})_{0 \leq j,k \leq 2N}$ donnée par

$$p_{jk} = P(X_{n+1} = k / X_n = j) = \begin{pmatrix} 2N \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{j}{2N}\right)^k \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-k}$$

1. Expliquer le choix de ces probabilités binômiales
2. Vérifier que si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = 0$ et de même $X_n = 2N$ alors $X_{n+1} = 2N$.
3. Montrer que partant de n'importe quel état $\{1, 2, \ldots, 2N-1\}$, on peut aller dans l'un des états 0 ou $2N$ en une seule étape (on dit que les états 0 et $2N$ sont *absorbants*).

   Dérive Génétique : On peut en déduire qu'au bout d'un temps fini la chaine sera dans l'un des états 0 ou $2N$ et que par conséquent l'un des deux gènes présents au départ aura disparu. Ce modèle simplifié illustre le fait qu'une population isolée finit par perdre sa variabilité génétique.
4. En supposant, pour simplifier à l'extrême, que $N = 1$, calculer la matrice de transition $\mathbb{P}$ et représenter dans ce cas le diagramme en points et flèches de cette chaine (à trois états). Montrer que la trajectoire ($X_n = 1$ pour tout n) est de probabilité nulle et donc que l'évènement (il existe n tel que $X_m \in \{0, 2\}$ pour tout $m \geq n$) est un évènement certain.