Leçon 5 : Chaines de Markov :autres exemples.

Dans cette leçon, nous examinons quelles sont les principales propriétés des chaines de Markov et nous étudions quelques exemples suplémentaires.

Propriétés de Markov Lorsqu'un système est modélisé par une équation différentielle son avenir est uniquement déterminé par sa situation présente, d'où son nom de *dynamique déterministe*. Pour une chaîne de Markov au contraire, on fait l'hypothèse qu'il y a plusieures évolutions possibles à partir de la situation présente, chacune d'elles ayant une certaine probabilité de se réaliser. C'est cette incertitude sur l'avenir qui est prise en compte par les modèles markoviens que l'on appelle aussi *dynamiques stochastiques*. Mais il existe bien d'autres dynamiques stochastiques que les chaines de Markov et celles-ci ont une propriété bien spéciale, que l'on appelle *absence de mémoire* (ou simplement *propriété de Markov*) que nous allons indiquer à présent. Losqu'un système a plusieurs avenirs possibles à partir de son état présent, il se pourrait que la probabilité que l'un ou l'autre de ces avenirs se réalise dépende non seulement de son état présent mais aussi de son histoire récente : dans ce cas, il faudrait par exemple prendre en compte le fait que la probabilité $p_{ij} = P(X_{t+1} = x_j/X_t = x_i)$ pourrait être différente selon que $X_{t-1} = x_k$ ou que $X_{t-1} = x_l$. Il n'y aurait plus moyen alors de définir de matrice de transition. En réalité, lorsqu'on adopte une modélisation par une chaine de Markov, on suppose de fait que la dynamique stochastique considérée possède la propriété suivante, appelée *propriét*é *de Markov* :

$$P(X_{t+1} = x_j/X_t = x_i, X_{t-1} = x_k, X_{t-2} = x_l, \ldots) = P(X_{t+1} = x_j/X_t = x_i).$$

Chaines de Markov irréductibles : Une chaine de Markov est dite *irréductible* lorsque tous ses états communiquent, c'est-à-dire lorsque, pour toute paire d'états (x_i, x_j) la probabilité d'aller de l'un à l'autre est strictement positive. Cette propriété peut se lire généralement sur le diagramme en points et flèches. En effet, on s'assure que la chaine est irréductible en vérifiant que chaque paire de points est soit reliée par une flèche soit reliée par une succession de flèches. Ainsi, l'exemple de la chaine $\{h, a, f\}$ de la leçon précédente est une chaine de Markov irréductible de même que celui des souris dans le labyrinthe $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mais, si l'on modifie cet exemple en considérant que lorsque la souris a atteint le compartiment 5 (qui contient le fromage) elle y reste avec probabilité 1, alors cette chaine n'est plus une chaine irréductible car il n'y a pas de flèche allant de l'état 5 vers l'un quelconque des autres états. Un état de ce type, dans lequel on reste à coup sur lorsqu'on y parvient s'appelle un é*tat absorbant*. Une chaine présentant un état absorbant ne peut pas être irréductible.

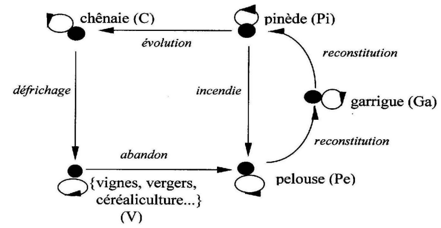
Etats récurrents/transitoires : Un état $x_i \in S$ tel que, lorsque la chaine est issue de ce point, elle y retourne en un temps fini avec une probabilité strictement positive, s'appelle un état *récurrent* (sinon l'état est dit *transitoire*). Lorsqu'un état est récurrent, chaque trajectoire issue de ce point y revient presque certainement une infinité de fois. Par contre, lorsqu'il est transitoire, chaque trajectoire issue de ce point n'y revient presque surement qu'un nombre fini de fois.

Cette distinction entre états récurrents et transitoires est nettement plus délicate à déduire du diagramme en points et flèches. Notons simplement que lorsque la chaine de Markov est irréductible (et qu'elle a un nombre fini d'états), ses états sont tous récurrents. On parle alors de chaine récurrente. Un cas particulier intéressant de chaine récurrente est celui d'une chaine *périodique*. C'est le cas d'une chaine dont la matrice de transition vérifie $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^3 = ... = \mathbb{P}^n$, par exemple si

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une chaine dont tous les états sont récurrents admet pour loi stationnaire la loi définie par $\pi(x_i) := \frac{1}{m(x_i)}$, où $m(x_i)$ est l'espérance du temps de retour à l'état x_i (si l'on est parti de x_i). Et moyennant quelques hypothèses suplémentaires, une telle chaine de Markov tend vers sa loi stationnaire quelque soit sa loi initiale.

Exemple de dynamique évoluant vers une loi stationnaire : A titre d'exemple examinons la dynamique suivante qui modélise l'évolution des écosystèmes mediterranéens. A l'origine la forêt méditerranéenne, sur roche calcaire à faible altitude, était très certainement dominée par des chênes (chênes pubescents). Mais l'action de l'homme a éradiqué ces forêts primitives pour leur substituer parcours pastoraux, vergers, ... Puis l'abandon de toute activité agricole au lieu de conduire à restauration naturelle de ces chênaies a bien souvent favorisé l'implantation d'une autre espèce, le pin d'Alep, après passage par un état de guarrigue. Or ces forets de substitution, hautement inflammables, subissent de manière récurrente le passage du feu (incendies volontaires ou non) et sont donc condamnées à une perpétuelle reconstitution. Voici le diagramme en points et flèches correspondant et la matrice de passage de cette chaine de Markov à 5 états $S = \{C, V, Pe, Ga, Pi\}$



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,25 & 0 & 0,65 \end{pmatrix}$$

On se convainc facilement que cette dynamique évolue indéfiniment en passant d'un état à un autre sans qu'aucun état absorbant ou aucune chaine périodique ne vienne stabiliser la dynamique. Mais si l'on observe les puissances successives de la matrice de transition $\mathbb{P}$, on peut voir qu'après un grand nombre d'itérations $\mathbb{P}^n$ tend vers une matrice limite dont toutes les lignes sont égales, ce qui signifie que la distribution (proportion de chacun des états) évolue vers une distribution unique qui est une distribution stationnaire. Ainsi on a

$$\mathbb{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0,17520 & 0,11680 & 0,20437 & 0,15327 & 0,35034 \\ 0,17517 & 0,11680 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35035 \\ 0,17551 & 0,11678 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35037 \\ 0,17517 & 0,11678 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35037 \\ 0,17518 & 0,11678 & 0,20437 & 0,15328 & 0,36036 \end{pmatrix}$$

Exercice 1 : L'observation du développement d'un organisme (animal ou plante) au cours du temps fait apparaître l'ensemble des états suivants : juvenile, maturité sexuelle, sénescence et décès, que nous noterons respectivement j, m, s et d, avec des probabilités de passage d'un état vers un autre données par la matrice suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,55 & 0,15 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la probabilité de passer en deux étapes de l'état de maturité sexuelle à l'état de sénescence. Calculer la matrice $\mathbb{P}^2$ et vérifier la probabilité calculée précédemment. La chaine est-elle périodique ?
2. Tracer le diagramme en points et flèche. La chaine est-elle irréductible ?
3. Pour chaque état, indiquer s'il est absorbant, transitoire, récurrent.

Exercice 2 : On considère une chaine de Markov à quatre états $S = \{1, 2, 3, 4\}$ dont la matrice de transition est

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe en points et flèches associé à cette chaine de Markov.
2. Calculer les probabilités des trajectoires suivantes en fonction des probabilités initiales de chaque état (p_0, q_0, r_0, s_0) :
   $(X_0 = 1 \ , \ \forall n \geq 1 \ X_n = 3)$, $(X_0 = 1 \ , \ X_1 = 2 \ , \ \forall n \geq 2 \ X_n = 4)$,
   $(X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 3$ si n est impair$)$.
3. Montrer que la trajectoire $(X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 2$ si n est impair$)$ est de probabilité nulle.
4. On suppose que la répartition entre les quatre états est uniforme à l'instant initial $t = 0$. Calculer la répartition à l'instant $t = 1$ puis à l'instant $t = 2$. Même question si l'on part d'une distribution initiale $\pi_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.
5. Montrer que toute distribution initiale de la forme $\pi_0 = (0, 0, r_0, s_0)$ avec $r_0 + s_0 = 1$ est une distribution stationnaire. En existe-t-il d'autres ?
6. Montrer que les états 3 et 4 sont *absorbants*. Les autres sont-ils transitoires ou récurents ?