Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

corrigé

L3MASS et L3 Maths, année 2013-2014

Date :
Groupe :

Feuille-réponse du TP 3
Introduction aux équations différentielles ordinaires
solutions approchés par la méthode d'Euler

1 Exercices sur table

Exercice 1. : On modèlise l'évolution de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400000}\right)$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0, 08 et 400000 ?

On reconnait un modèle logistique, de la forme $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$ où $r = 0.08$ est le taux de croissance intrinsèque et $K = 400\,000$ est la capacité biotique de la population de baleines.

2. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleine est tombé à 60000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, au moyen de la méthode d'Euler, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2, ...en prenant un pas de temps $h = 1$. On rappelle que la méthode d'Euler pour l'équation $y' = f(y)$ s'écrit :

$$\begin{cases} t_n &= t_{n-1} + h \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}). \end{cases} \quad (1)$$

Indiquer votre réponse puis présenter succinctement les calculs qui vous y ont conduit ; vous pourrez utiliser que $f(60000) = 4080$ et $f(64080) = 4305.1507$

On trouve : $y_0 = 60000$ $y_1 = 64\,080$ $y_2 = 68\,385.1507$

En effet :

$$y_1 = y_0 + h\,f(y_0) \underset{h=1}{=} 60\,000 + f(60000) = 60000 + 4080 = 64\,080.$$

et

$$y_2 = y_1 + h\,f(y_1) \underset{h=1}{=} 64\,080 + f(64\,080) = 64080 + 4305.1507 = 68385.1507.$$

3. Que dire de $\lim_{n\to\infty} y_n$?

La suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dépend du pas h et, si h est très petit, (y_n) est très proche de la solution $y(t_n)$ au point t_n. Lorsque $t \to +\infty$, $y(t)$ tend vers la capacité biotique K. Donc, si le pas h est suffisamment petit, ce sera aussi le cas de y_n qui tendra comme $y(t_n)$ vers K. Néanmoins, pour un h fixe (surtout s'il n'est pas petit) on ne peut être sûr que $y_n \to K$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2. : On étudie l'équation différentielle linéaire autonome $y' = -2y$.

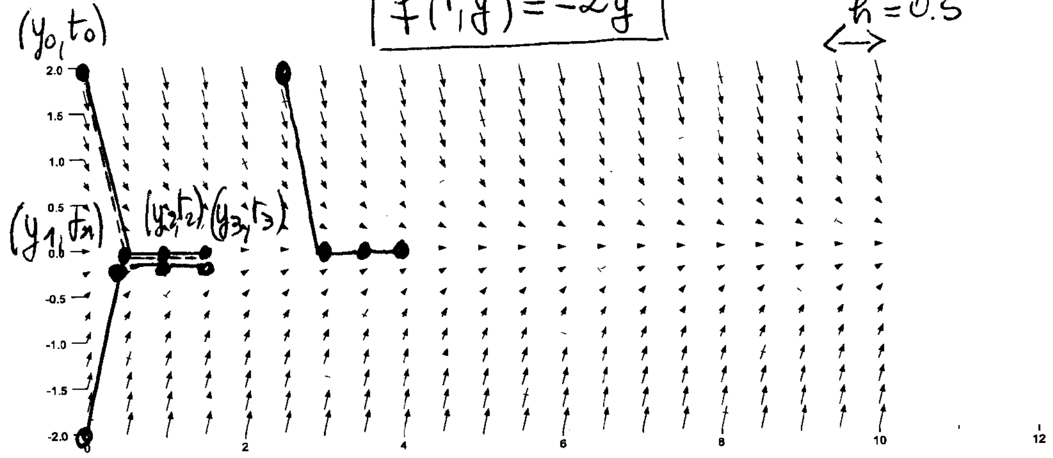
1. Indiquer quel est l'ensemble des solutions de cette équation. Vérifier que $y = 0$ est une solution particulière (et un équilibre) et indiquer quelle est la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 2$.

- D'après le cours, on sait que l'ensemble des solutions de cette équation linéaire s'écrit
  $S = \{ y(t) = C e^{-2t} \quad C \in \mathbb{R} \}$.
- $y = 0$ est une solution particulière de $y' = -2y$ car, quand $y = 0$, $y' = 0$ et donc on a bien $y' = -2y$. C'est un équilibre.
- Parmi les solutions formant l'ensemble S, celle qui vaut 2 en $t = 0$ est $y(t) = 2e^{-2t}$ (celle telle que $C = 2$).

2. Représenter la solution approchée issue de $(t_0, y_0) = (0, 2)$ obtenue par la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.5$. Recommencer avec $(t_0, y_0) = (5, 2)$, puis $(t_0, y_0) = (0, -2)$. Qu'observez-vous ?

$\boxed{f(t,y) = -2y}$

$h = 0.5$



Cas où $y_0 = 2$:	Cas où $y_0 = -2$	Cas où $t_0 = 5$, $y_0 = 2$
$y_1 = y_0 + h f(y_0)$ $= 2 + 0.5 f(2)$ $= 2 + 0.5(-4)$ $= 0$	$y_1 = y_0 + h f(y_1)$ $= -2 + 0.5 f(-2)$ $= -2 + 0.5(4)$ $= 0$	$y_1 = y_0 + h f(y_0)$ $= \dots = 0$
$y_2 = y_1 + h f(y_1)$ $= 0 + 0.5 f(0)$ $= 0$	$y_2 = 0$	$y_2 = 0$
$y_3 = y_2 + h f(y_2)$ $= 0$	$y_3 = 0$	$y_3 = 0$ } m̂ calculs

2

2 Exercices au moyen de Scilab

Exercice 3. : On poursuit l'étude de l'équation différentielle linéaire autonome $y' = -2y$.

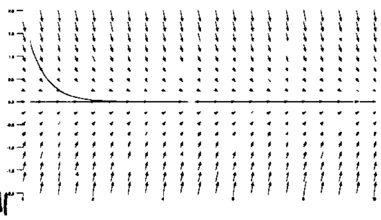
1. Les lignes suivantes permettent de tracer, dans la fenêtre numérotée 0 le *champ de vecteurs* de la question précédente associé à cette équation en traçant, en tout point (t, y) du plan un vecteur proportionnel à $(1, -2y)$ et donc tangent à la solution de l'équation différentielle passant par ce point.

```
function ff=ff(t,y); ff=1; endfunction;
function gg=gg(t,y);gg=-2*y;endfunction;
tt=0:0.5:10;yy=-2:0.25:2;
taille=size(tt);taille_tt=taille(2);
taille=size(yy);taille_yy=taille(2);
for i=1:taille_tt
     for j=1:taille_yy
         horiz(i,j)=ff(xx(i),yy(j)); verti(i,j)=gg(xx(i),yy(j));
     end
end
champ(tt,yy,horiz,verti);
```

Selon la question précédente, quelles courbes issues des points $(0,0)$ et $(0,2)$ sont tangentes à ce champ ?

Les courbes tangentes au champ sont les solutions de l'équation. On a calculé les solutions de condition initiale $(0,0)$ et $(0,2)$ et on a trouvé $y(t) = 0$ solution constante nulle (l'équilibre) et $y(t) = 2e^{-2t}$ (qui vérifie $y(0) = 2$)

2. Quelles instructions Scilab permettent de représenter ces deux solutions comme sur la figure ci-dessous



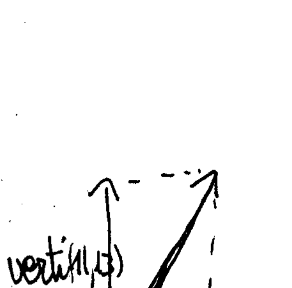
Pour $tt = 0:0.5:10$ et gg définie comme en 1.,
~~On pose~~
$\boxed{\text{yy = ode(2,0,tt,gg);}}$
$\boxed{\text{plot(tt,yy)}}$ pour représenter le graphe de la solution $y(t) = 2e^{-2t}$

De m̂ pour représenter la solution nulle, on remplace le "2" dans ode par un "0".

3. L'instruction champ comporte 4 arguments obligatoires (et d'autres facultatifs). Étudier a quoi correspondent ces arguments dans l'aide en ligne puis faites les deux expériences suivantes en expliquant ce que vous observez :
– remplacer la liste des ordonnées yy par -5:1:5
– remplacer le pas de temps et d'espace par 0.4

Dans l'instruction champ(tt,yy,horiz,verti), l'argument tt permet de choisir l'~~espacement~~ et le nombre de vecteurs dans la largeur et l'argument yy l'espacement et le nombre de vecteurs dans la hauteur. Ainsi si yy=-5:1:5, il y aura verticalement entre -5 et 5, 11 lignes de vecteurs, espacées de 1 en 1.

4. Revenir au tracé original du champ de vecteurs. Que représente géométriquement (horiz(11),verti(13)) ?



horiz(11,13) et verti(11,13) représentent respectivement la 1ère coordonnée et la 2ième coordonnée du vecteur du champ de vecteurs placé dans la 11e ligne et la 13e colonne de vecteurs.

Exercice 4. : On étudie à présent l'équation différentielle $y' = -2y + 5\cos t$.

1. Tracer le champ de vecteurs associé en choisissant les intervalles `0:0.5:15` pour t et `-5:0.5:5` pour y. Qu'observez-vous concernant la dynamique des solutions de cette équation ?

Sur la figure obtenue (m̂ code que en 3. question 1, en remplaçant gg par $\overline{gg}$), on observe qu'une solution oscille et que les solutions éloignées s'en rapprochent presque verticalement. On reconnait "l'équilibre dynamique" étudié au TP2.

$\boxed{\text{function } \overline{gg}=\overline{gg}(t,y);\ \overline{gg}=-2*y+5*\cos(t);\ \text{endfunction};}$

2. Rappeler les valeurs trouvées des deux constante A et B telles que $y(t) = A\cos t + B\sin t$ soit une solution particulière de l'équation. Quelle est la condition initiale de cette solution particulière. Représentez cette solution sur votre figure et donnez ci-dessous le code utilisé pour la tracer.

On a obtenu $A=2$ et $B=1$, ce qui correspond à la solution particulière $y^*(t)=2\cos t+\sin t$. En $t=0$, $y^*(0)=2$. Pour représenter le graphe de $y^*(t)$ sur la figure, on pose

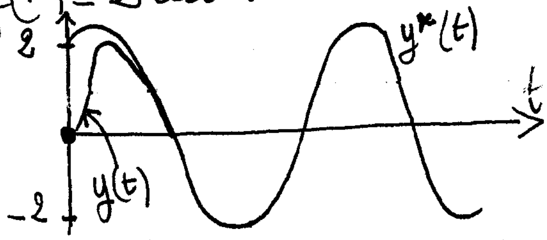
```
yy=ode(2,0,tt,gg̅);
plot(tt,yy)
```

3. Indiquer quel est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle considérée et préciser laquelle vaut 0 à l'instant $t = 0$. La tracer sur la figure.

$y'=-2y+5\cos t$ est une équation linéaire dont on connait une solution particulière $y^*(t)$. Donc l'ensemble de les solutions est

$$\{y(t)=y^*(t)+C\,e^{-2t},\quad C\in\mathbb{R}\}$$

Comme $y^*(0)=2$, c'est le choix $C=-2$ qui donne une solution $y(t)=2\cos t+\sin t-2e^{-2t}$ qui vaut 0 en $t=0$.



Exercice 5. : Champs autonomes / non autonomes Le champs de vecteurs associé à l'équation $y' = -2y$ est invariant par translation horizontale. Est-ce aussi le cas pour celui qui est associé à l'équation $y' = -2y + 5\cos t$? Expliquer pourquoi.

Le champs de vecteurs associé à l'équation $y'=-2y$ présente des lignes de vecteurs constants (la direction ne change pas lorsque t varie) alors que celui qui est associé à $y'=-2y+5\cos t$ présente des lignes de vecteurs qui varient et ne restent pas constants : les coordonnées de ces vecteurs dépendent de t.