NOM : Date : .

PRENOM : .

Feuille-question du TP 8
Dynamique des populations : matrices de Leslie

1 Exercices sur table

1.1 Saumons

Considérons une population de saumons en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde, et enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 juveniles au cours de sa deuxième année et à 5 au cours de sa troisième année. Si l'on désigne respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t des femelles juvéniles, des femelles préadultes (saumons de 1 an) et des femelles adultes (saumons de 2 ans), les informations précédentes peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{t+1} & = & 4p_t + 5a_t \\ p_{t+1} & = & 0,53 j_t \\ a_{t+1} & = & 0,22 p_t \end{array}\right. \quad (1)$$

1. Indiquer qu'elle est la matrice de Leslie L de cette dynamique.

2. Calculer L^2, L^3, puis L^5 puis vérifier que la matrice `L` est *primitive*.

1.2 Oiseaux

On considère une espèce d'oiseaux ayant une durée de vie maximale de 3 ans. Une étude conduit à l'observation suivante : En moyenne chaque paire de ces oiseaux conduit à la naissance durant leur deuxième année à deux oisillons. Un échantillon typique de 8 oiseaux produit 15 autres oisillons durant leur troisième année. Seul 40% atteignent leur deuxième année, et seul 30% des oiseaux d'un an atteignent leur troisième année. Les taux de survie ne dépendent pas du genre des oiseaux.

1. Choisir un modèle pour la dynamique de ces oiseaux (décrire les classes d'ages et le pas de temps de la dynamique)

2. Donner les équations du modèle, puis sa matrice L.

3. Comme vous pourrez le vérifier au cours de la séance sous `Scilab` la valeur propre dominante de L est approximativement égale à $\lambda = 0.8$ et son vecteur propre $X = {}^t(0.88, 0.44, 0.16)$. Sachant que L^5 n'a aucun de ses coefficients qui est nul, indiquer comment vont s'établir les proportions entre les trois générations et comment va évoluer la population (augmenter, diminuer). Expliquer.

4. Pourquoi était-il important de connaitre la propriété indiquée de L^5 ?

2 Exercice au moyen de `Scilab`

2.1 Oiseaux

On commence par vérifier les affirmations relatives à la dynamique des oiseaux utilisées vue en 1.2

1. Quel est le nombre de coefficients nuls des matrices L^2, L^3, L^4, L^5 ? Conclusion ?

2. On considère une population de 6000 oiseaux, également répartie sur les trois classes d'age. Quelle est la population et sa répartition après 10 ans et après 50 ans ? Conclusion ?

3. Quelle est l'évolution du nombre d'oisillons durant les 10 premières années ?

2.2 Saumons

2.- Le théorème de Perron Frobenius assure que la distribution limite est un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module, dite *valeur propre dominante.* Nous allons expérimenter ceci pour les saumons considérés à la sous-section 1.1. Comme c'est une distribution, il convient de diviser les coefficients du vecteur propre donné par `Scilab` (qui est généralement normé pour la norme euclidienne) par la somme de ses coefficients obtenant ainsi un vecteur normé pour la norme de la somme des (valeurs absolues) des coefficients, souvent appelée "norme 1".

```
//Calcul des vecteurs propres et valeurs propres
[vcp,vlp]=spec(L);
//vecteur ligne ('r'=row) des sommes par colonnes
normes1vcp=sum(vcp,'r');
//calcul des vecteurs "renormalisés"
for ligne=1:3;
      vcpnorme(ligne,:)=vcp(ligne,:)./normes1vcp;
end;
disp(vcpnorme,"vecteurs propres=", vlp,"valeurs propres");
```

1. Pourquoi a-t-on `./` dans le calcul de `vcpnorme` ?

2. Quelle valeur propre dominante λ trouvez-vous et quelle distribution limite V_∞ ?

3. On veut calculer la dynamique d'une population qui, à l'instant initial, comporte 2000 juvéniles, 1000 préadultes, et 500 adultes.

```
//condition initiale
V0=[2000;1000;500];
// il y aura tMax+1 instants
tMax=20;
// initialisation de V
V=zeros(3,tMax+1);
V(:,1)=V0;
//voici les instants où V(t) sera calculé
tt=0:tMax;
//Calcul des V_{t+1} pour t>0 ; rangé dans V(:,t+1+1)
for t=0:tMax-1;//on calcule V_{t+1}
V(:,t+1+1)=L*V(:,t+1);
```

```
end;
//size(tt)//pour debuggage: verifier que les tailles sont egales.
//size(V)
j=V(1,:);//les juveniles
p=V(2,:);//les preadultes
a=V(3,:);//les adultes
//juveniles en vert, preadultes en bleu, adultes en rouge
plot(tt,j,'g-*');plot(tt,p,'b--o');plot(tt,a,'r.->');
```
Esquissez avec soin les tracés obtenus

4. Dynamique de la distribution des trois sous populations
```
xset("window",1);
total=j+p+a;
plot(tt,j./total,'g-*'); plot(tt,p./total,'b--o'); plot(tt,a./total,'r.->');
```
Qu'observez-vous ? Pouviez-vous le prévoir ?

5. Log de cette dynamique
```
xset("window",2);
plot(tt,log(j),'g-*'); plot(tt,log(p),'b--o'); plot(tt,log(a),'r.->');
```
Qu'observez-vous ? Expliquez en quoi cela montre que la dynamique des trois population est "en $Ce^{\mu t}$" ; quelle valeur de μ obtenez-vous ? Était-ce prévisible ?

6. Voici une autre manière de programmer le tracé la dynamique. Expliquer la différence avec la précédente.
```
xset("window",3);
Couleur=['g-*','b--o','r.->']; for ligne=1:3;
W(ligne,:)=V(ligne,:)./total;
plot(tt,W(ligne,:),Couleur(ligne))
end;
```