Université de Nice
ESSI

Année 2004-2005
DESS IMAFA

Examen
Jeudi 18 novembre 2004, 8 :30-10 :30
Modèles de Ho et Lee, et produits de taux d'intérêts

Un modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t \ := T_{\max}/N$, $t \leq T$, où Z_t^T désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T. On a donc $Z_T^T = 1$ pour n'importe quel $T \in \mathbb{T}$. C'est un modèle probabiliste sur un ensemble Ω servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ servant à coder l'information disponible à la date $t \in \mathbb{T}$. En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}^*}$, $\mathbb{T}^* :=]0..T]_{\delta t}$, $X_t \in \{0,1\}$, les X_t de même loi $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$, $\mathcal{F}_t$-mesurables, et indépendantes de $\mathcal{F}_{t-\delta t}$[1]. Pour tout $t \in \mathbb{T}^*$, posons $J_t := \sum_{s\in]0..t]_{\delta t}} X_s$. Notons i et k, $i \leq k$, les entiers tels que $t = i\delta t$ et $T = k\delta t$; la caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les $Z_t^T(\omega)$ appartiennent à un arbre binaire recombinant, c'est-à-dire que, $Z_{i\delta t}^T(\omega)$ ne prend que $i+1$ valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur $j = J_{i\delta t}(\omega)$. Pour $0 \leq j(= J_{i\delta t}(\omega)) \leq i \leq k$, nous noterons $Z_{i\delta t}^{k\delta t}(\omega)$:=`Z(i,j,k)`.

1. Montrer que `Z(k,j,k)`$=1$.
2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t}\eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

   pour une fonction η définie par le choix[2] d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0,1[$, le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

   Les valeurs des Z_0^T, $T \in \mathbb{T}$, peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché.
   Vérifier que $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t) \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) = \mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t)) = 1$, pour tout θ et t dans $\mathbb{T}^*$, et où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.
3. On définit le taux court, "sans risque" r_t, par

$$Z_t^{t+\delta t}(1 + r_{t+\delta t}) = 1 \ ; \tag{3}$$

   on voit donc que $r_{t+\delta t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (on dit que le processus $(r_t)_{t\in\mathbb{T}^*}$ est $\mathbb{F}$-*prévisible*) ; on pose

$$B_t := (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t) \text{ et } \tilde{Z}_t^T := Z_t^T / B_t.$$

   En établissant que $\mathbb{E}^*(\tilde{Z}_t^T \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) = \tilde{Z}_{t-\delta t}^T$, montrer que $(\tilde{Z}_t^T)_{t\in\mathbb{T}}$ est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale, et que ce modèle est donc sans arbitrage.
4. Voici une implantation du modèle pour lequel on a $T_{\max} = N$ (et donc $\delta t = 1$=`delta_t`), t =`i*delta_t`, T =`k*delta_t`, $J_t(\omega)$ =`j`, $T - t$ =`l*delta_t`, T =`k*deltat_t`, $\eta(T - t, X_t(\omega))$ =`eta(l*delta_t,x)`, pour `x`$= X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =`Z(i,j,k)`, pour $J_t(\omega)$ =`j`, avec les choix π =`pi :=0.5`, et δ =`delta :=1.01`.

```
> restart:with(plots):with(plottools):
> N:=30: Tmax:=N: delta_t:=Tmax/N: pi:=0.5:delta:=1.01:
```

[1]Attention, dans le cours, les v.a. X_t ont été notées (maladroitement) Y_t, et dans l'article de M. Leippold et Z. Wiener qui vous a été indiqué, il est fait le choix $\mathbb{P}(X_t = 0) = (1 - \pi)$

[2]C'est le choix $\delta(= \eta(\delta t, 1)/\eta(\delta t, 0)) > 1$ qui exprime qu'un $X_t(\omega) = 1$ code un "*up*" et $X_t(\omega) = 0$ code un "*down*"

```
> r:=0.025:# taux-court initial
> Z0:=proc(k) option remember; (1+r)^(-k) end: # T=k*delta_t
> StructureParTermesInitiale:=[seq( [k,Z0(k)], k=1..N )]:
> plot(StructureParTermesInitiale):
> eta:=proc(l,x) option remember; # T-t=l*delta_t
> if x=0 then 1/(pi+(1-pi)*delta^(l*delta_t)) else eta(l,0)*delta^l fi end:
> Z:=proc(i,j,k) option remember; #t=i*delta_t et T=k*delta_t
> if k<i then 1 # k<i n'a pas de sens, mais on veut pouvoir dessiner
> elif i=0 then Z0(k)
> elif j>0 then Z(i-1,j-1,k)/Z(i-1,j-1,i)*eta(k-i,1)
> else Z(i-1,j,k)/Z(i-1,j,i)*eta(k-i,0) #ici i>0 et j=0
> fi
> end:
> BrancheZ:=proc(i,j,k) option remember;
> if i<k then line([i,Z(i,j,k)],[i+1,Z(i+1,j,k)],color=blue),
> BrancheZ(i+1,j,k),
> line([i,Z(i,j,k)],[i+1,Z(i+1,j+1,k)],color=red,linestyle=3),
> BrancheZ(i+1,j+1,k)
> fi end:
> ArbreZ:=proc(k) option remember;
> BrancheZ(0,0,k),labels=['t','Z'],thickness=3 end:
> plots[display](ArbreZ(8)):
```

(a) Comment a été choisie la fonction $T \mapsto Z_0^T$ constituée par les valeurs initiales de Z_t^T ?

(b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de Z^8 : que vaut Z_8^8 ? Que vaut Z_0^8 et retrouver cette valeur sur la courbe `StructureParTermesInitiale`? Que vaut Z_4^8 après deux "*up*" et deux "*down*" ? Que vaut Z_6^8 après rien que des "*up*" ? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance $T = 8$ est "*above par*" ; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle ?

5. **Taux actuariels :** On appelle taux actuariel (Yield) d'un zéro-coupon le taux noté Y_t^T tel que

$$Z_t^T(1+Y_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour $t < T$.

(a) Définir une procedure `Y(i,j,k)` correspondant au zéro-coupon $Z_{i\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ quand $J_{i\delta t}(\omega) = j$, qui est lui de valeur `Z(i,j,k)`.

(b) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de Y_t^T aux deux valeurs $Y_{t+\delta t}^T$ pouvant lui succéder dans ce modèle.

(c) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour Z_6^8 dans la question précèdente.

6. **Caplets et Caps :** Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal K. Typiquement, si l'intérêt r_T payable à la date T pour l'emprunt d'un euro à la date $T - \delta t$, ce contrat payera $(r_T - K)^+$. Ce contrat s'appelle un *caplet à* l'échéance T au plafond K. Pour le prêt d'un euro remboursable à la date $T_{\max}$ et à intérêts payable à intervalle $\delta t =$ un an, il convient de souscrire un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance $T \in]0..T_{\max}]_{\delta t}$. Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date $t-\delta t$, par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en $Z_{t-\delta t}^t$ et en placement (risqué) en $Z_{t-\delta t}^{t+\delta t}$. Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et,

comme les processus $(\tilde{Z}_t^T)_{t\in[0..T]}$ sont, pour tout $T \in \mathbb{T}$, des $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\mathrm{Caplet}_{t-\delta t}^T(K) = \mathbb{E}^*(\mathrm{Caplet}_t^T(K) \mid \mathcal{F}_{t-\delta t})/(1+r_t) \tag{4}$$

(et plus généralement, pour tous $s \leq t$, $\mathrm{Caplet}_s^T(K) = \mathbb{E}^*\left(\mathrm{Caplet}_t^T(K)\frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right)$). De manière similaire au cas des zéro-coupons et taux actuariels, notons $\mathrm{Caplet}_t^T(K)(\omega)$=`Caplet(K,i,j,k)`, toujours avec $t = \mathtt{i}\delta t$, $J_t(\omega) = \mathtt{j}$, et $T = \mathtt{k}\delta t$.

`i=k`) Comment définir `Caplet(K,k,j,k)`?

`i=k-1`) Comme $1/(1+r_t) = Z_{t-\delta t}^t$, montrer que `Caplet(K,k-1,j,k)=Caplet(K,k,j,k)*Z(k-1,j,k)`.

`i<k-1`) Exprimer `Caplet(K,i,j,k)` en fonction de `Caplet(K,i+1,j,k)` et `Caplet(K,i+1,j+1,k)` lorsque `i<k-1`, en utilisant (4).

`proc`) Définir une procédure `Caplet(K,i,j,k)` donnant la valeur de $\mathrm{Caplet}_{i\delta t}^{k\delta t}(K)(\omega)$ lorsque $J_{i\delta t}(\omega)$=`j`.

Application : Dans le modèle de Ho et Lee considéré (où $r_{\delta t}$=2,5%), quel est le prix d'un contrat de plafonnement à 4,5% des intérêts payés annuellement sur un emprunt de 1.000.000 euros sur 15 ans. Idem pour un plafonnement à 3,5%