

Modèles Mathématiques Discrets  
pour la Finance et l'Assurance

Marc et Francine DIENER

7 septembre 2007



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Prix et couverture d'une option d'achat</b>	<b>5</b>
1.1	Evaluation du prix dans un modèle à une étape . . . . .	5
1.2	Modèle à deux étapes : couverture dynamique. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein</b>	<b>11</b>
2.1	Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein . . . . .	11
2.2	Construction du portefeuille de couverture . . . . .	12
2.3	Probabilité risque neutre et formule fondamentale . . . . .	13
2.4	Hypothèses du modèle . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Marches aléatoires. Filtration et information</b>	<b>17</b>
3.1	Définitions et exemples . . . . .	17
3.2	La marche de Wiener et ses dérivées . . . . .	18
3.3	Filtration et information . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Espérance conditionnelle</b>	<b>21</b>
4.1	Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un événement . . . . .	21
4.2	Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu . . . . .	21
4.3	L'espace euclidien $L^2(\Omega)$ . . . . .	22
4.4	Application au calcul de prix d'options . . . . .	23
<b>5</b>	<b>La formule de Black-Scholes</b>	<b>25</b>
5.1	La formule exacte de CRR . . . . .	25
5.2	Vers la formule de Black et Scholes . . . . .	25
5.3	Rappels d'asymptotique infinitésimale . . . . .	27
5.4	Calcul asymptotique . . . . .	28
5.4.1	Asymptotique de $a$ . . . . .	28
5.4.2	Asymptotique de $\binom{n}{a}$ . . . . .	29
5.4.3	Asymptotique de $I(a, p) := \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt$ . . . . .	30
5.5	Preuve de la formule de Black et Scholes . . . . .	30
5.6	Convergence vers le prix Black-Scholes . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Options barrières</b>	<b>33</b>
6.1	Définitions et exemples . . . . .	33
6.2	Mesurabilité et temps d'arrêt . . . . .	34
6.3	Calcul du prix d'une option DIC . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Martingales</b>	<b>37</b>
7.1	Définition et exemples . . . . .	37
7.2	Quelques propriétés . . . . .	38
7.3	Calcul des "pertes et profits" d'un portefeuille . . . . .	39
7.4	Le cas des marchés incomplets . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Options américaines</b>	<b>43</b>
8.1	Calcul du prix par récurrence retrograde . . . . .	43
8.2	Théorème d'arrêt optimal . . . . .	44
8.3	Stratégie de couverture avec consommation . . . . .	45

<b>9</b>	<b>Le modèle de Ho et Lee</b>	<b>47</b>
9.1	Introduction . . . . .	47
9.2	Un modèle discret de structure par terme . . . . .	47
<b>A</b>	<b>Exercices</b>	<b>49</b>
A.1	Les trajectoires d'un modèle à $n$ étapes . . . . .	49
A.2	Les trajectoires du call d'un modèle à $n$ étapes . . . . .	50
A.3	Calcul de prix par espérance conditionnelle . . . . .	51
A.4	Le Delta de couverture . . . . .	52
A.5	La formule de Black et Scholes; convergence des prix CRR vers BS . . . . .	53
A.6	Calcul de prix d'options barrière . . . . .	53
A.7	Calcul de prix d'options parisiennes . . . . .	53
A.8	Options américaines . . . . .	55
A.9	Modèles de Ho et Lee, et produits de taux d'intérêts . . . . .	57
A.10	Incidence du paiement d'un dividende sur le prix d'une action et d'une option . . . . .	59
A.11	Examen 2006-2007 . . . . .	60

# Chapitre 1

## Prix et couverture d'une option d'achat

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

**Définition :** Une *option* d'achat (européenne), encore appelée *call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiement que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'échéance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

### 1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons  $t = 0$  l'instant de souscription de l'option,  $t = T$  son échéance et  $K$  son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur  $S_0$  à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs  $S_T = S_0u$  ou  $S_T = S_0d$  à l'échéance, avec  $0 < d < 1 < u$ . On verra qu'il est naturel de supposer en outre que  $S_0d < K < S_0u$ . Soit  $C_0$  la valeur, à déterminer, du call à l'instant  $t = 0$  ; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si  $S_T$  prendra la valeur  $S_0u$  ou  $S_0d$ , mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si  $S_T = S_0d$ , l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à  $K$ ) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si  $S_T = S_0u$ , l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu  $K$ , soit  $S_0u - K$ , somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture*  $\Pi$ , composé de  $a$  actifs  $S_0$  et de  $b$  unités monétaires, et de choisir sa composition  $a$  et  $b$  de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si  $S_T = S_0d$  et

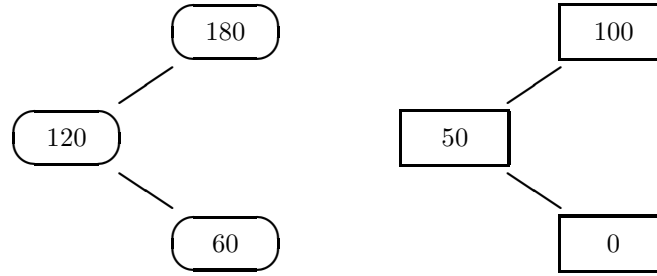


FIG. 1.1 – Un exemple de modèle à une étape

$S_0u - K$  si  $S_T = S_0u$ . Si l'on désigne par  $r$  le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille*  $(a, b)$  devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} aS_0u + be^{rT} &= S_0u - K \\ aS_0d + be^{rT} &= 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues  $a$  et  $b$ ) et on déduit des valeurs de  $a$  et  $b$  obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial  $\Pi_0 = aS_0 + b$ . On peut alors donner à  $C_0$  la valeur  $C_0 = \Pi_0$ .

**Exemple :** Par exemple, si  $S_0 = 120$ ,  $u = 1,5$ ,  $d = 0,5$ ,  $r = 0$ , et  $K = 80$ , la résolution du système (1.1) donne  $a = \frac{5}{6}$ ,  $b = -50$  et donc  $\Pi_0 = 50$ . Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à  $C_0 = 50$ , le vendeur emprunte 50 (car  $b = -50$ ) et achète  $a = \frac{5}{6}$  de  $S_0$  (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit  $150 = \frac{5}{6}180$ , si  $S_T = S_0u$ , et il paiera alors  $100 = 180 - 80$  au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans intérêts puisqu'on a supposé  $r = 0$ ), soit il vaudra  $50 = \frac{5}{6}60$ , si  $S_T = S_0d$ , ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

**Remarque :** Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que  $u \neq d$ , ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à  $t = T$ , il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

**Remarque :** Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix  $K$  (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera  $K - S_0d$  si  $S_T = S_0d$  et 0 si  $S_T = S_0u$ . Plus généralement, si l'on désigne par  $C_T = \varphi(S_T)$  le prix du contrat d'option à l'instant  $T$ , la résolution du système (1.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

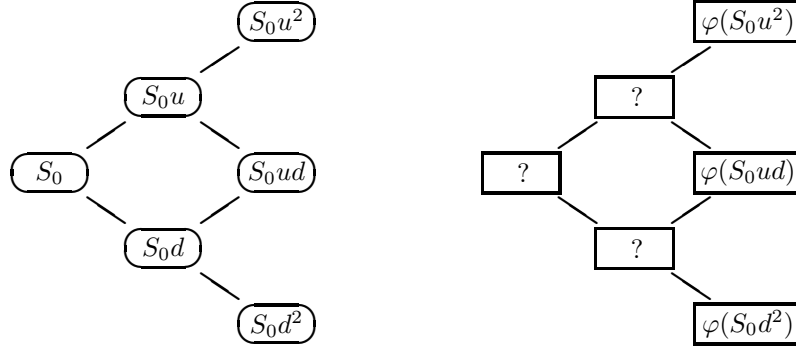
$$a = \frac{\varphi(S_0u) - \varphi(S_0d)}{S_0u - S_0d} \quad (1.2)$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

## 1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture  $(a, b)$  constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre  $t = 0$  et  $t = T$ ) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur  $S_t$  du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent :  $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$  et  $(S_t)$  prenant la valeur  $S_0$  à l'instant initial, l'une des deux valeurs  $S_{\delta t} = S_0d$  ou  $S_{\delta t} = S_0u$  à l'instant intermédiaire  $t = \delta t$  et l'une des trois valeurs  $S_T = S_0d^2$ ,  $S_T = S_0ud$  ou  $S_T = S_0u^2$  à l'échéance. Pour déterminer la

FIG. 1.2 – Quelles valeurs donner à l’option aux instants  $t = \delta t$  et  $t = 0$  ?

valeur d’un portefeuille de couverture d’une option  $C_T = \varphi(S_T)$ , raisonnons en partant de sa valeur  $\Pi_T$  à l’échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l’option il devra valoir  $\Pi_T = \varphi(S_T)$ , somme due en  $t = T$  par le vendeur à l’acheteur de l’option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par  $S_T$ . En utilisant la même méthode que dans le cas d’un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs  $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$  que devra prendre le portefeuille à l’instant  $t = \delta t$ , selon que  $S_{\delta t} = S_0d$  ou  $S_{\delta t} = S_0u$ . Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\begin{cases} aS_0u^2 + be^{r\delta t} = \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} = \varphi(S_0ud) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} aS_0ud + be^{r\delta t} = \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} = \varphi(S_0d^2) \end{cases} \quad (1.4)$$

Désignons par  $\Pi_{\delta t}^u$  et  $\Pi_{\delta t}^d$  les deux valeurs de  $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$  obtenues en remplaçant d’une part  $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$  par la solution du système (1.3) et  $S_{\delta t}$  par  $S_0u$  et d’autre part  $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$  par la solution du système (1.4) et  $S_{\delta t}$  par  $S_0d$ . Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l’instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l’option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\begin{cases} aS_0u + be^{r\delta t} = \Pi_{\delta t}^u \\ aS_0d + be^{r\delta t} = \Pi_{\delta t}^d \end{cases} \quad (1.5)$$

**Exemple :** Soit un titre valant  $S_0 = 80$  et changeant deux fois de prix avant l’échéance en  $T = 2\delta t$ . Observons que dans l’exemple précédent nous avons, à  $t = \delta t$ ,  $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$  ou  $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$ . Supposons qu’ici  $S$  suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \frac{1}{2}), \quad S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \frac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 1.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \quad (1.6)$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \quad (1.7)$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \quad (1.8)$$

Soit une option call de date d’exercice  $T = 2\delta t$  et prix d’exercice  $K = 80$  (lorsque  $K = S_0$ , on dit que c’est une option “à la monnaie”). On suppose, pour simplifier, que le taux d’intérêt monétaire  $r$  est ici égal à 0.

Observons que si  $S_{\delta t} = 120$  nous retrouvons l’exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c’est-à-dire si  $S_{\delta t} = 120$ ), doit valoir

$$\Pi_{\delta t}^u = 50.$$

Qu’en est-il si  $S_{\delta t} = 40$ ? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilités à venir pour  $S_{2\delta t}$  sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d’exercice  $K = 80$ , on aura dans les deux cas  $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$ , et donc  $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$  puisqu’il n’y a plus rien à couvrir dans ce cas.

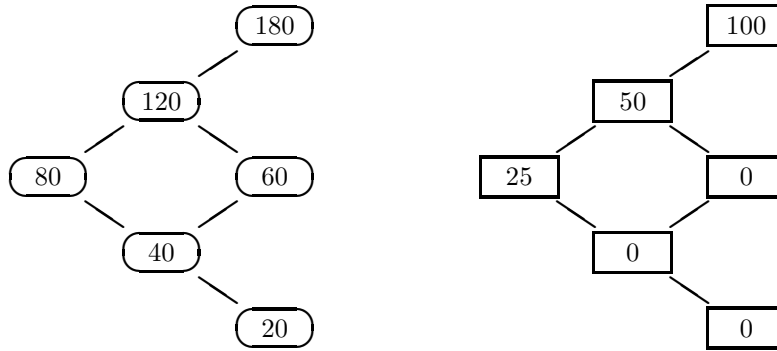


FIG. 1.3 – Deux pattes-d’oie : la première représente l’évolution sur deux étapes d’un actif à dynamique stochastique binaire, avec  $S_0 = 80$  et  $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$ ; la seconde celle du portefeuille de couverture d’un call sur cet actif de prix d’exercice  $K = 80$ .

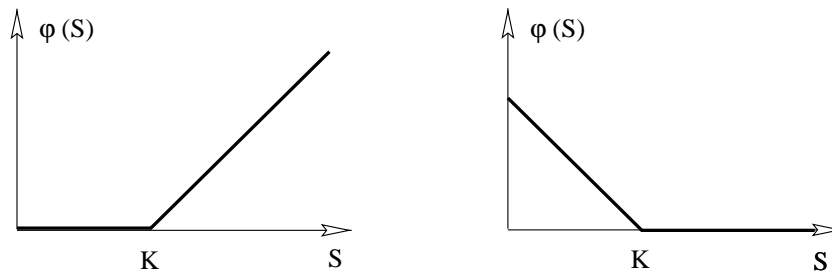


FIG. 1.4 – Fonction de paiement (ou pay-off) d’un call et d’un put : l’option call est l’option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d’échéance  $T$ , l’actif  $S$  à un prix maximal  $K$ . Si  $S_T \leq K$ , l’option aura donc une valeur nulle pour  $t = T$ . Si  $S_T > K$ , l’option vaudra  $S_T - K$  pour  $t = T$ , c’est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu  $K$  et le prix effectif  $S_T$  de l’actif à la date  $T$ . Pour une option call, on a donc  $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$ , où  $x^+$  vaut  $x$  si  $x > 0$  et 0 sinon. L’option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date  $T$ , l’actif  $S$  au prix minimum  $K$ . En examinant successivement les cas  $S_T \geq K$  et  $S_T < K$ , il est facile de voir que  $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$ . Le nombre  $K$  s’appelle le *prix d’exercice* (ou *strike*) de l’option.

A l’instant  $t = 0$  le portefeuille de couverture  $(a_0, b_0)$  doit satisfaire  $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$ , c’est-à-dire vérifier le système

$$\begin{cases} a_0 120 + b_0 &= a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 &= a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

On trouve immédiatement  $a_0 = \frac{5}{8}$  et  $b_0 = -25$  d’où  $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$ . Le vendeur de l’option, dont le prix est  $\Pi_0 = 25$ , touche cette prime à l’instant initial, y ajoute un montant de 25 qu’il emprunte, le tout servant à acheter  $\frac{5}{8}$  d’actifs à 80 pièce. Si, pour  $t = \delta t$ , l’actif sous-jacent a évolué à la baisse et que  $S_{\delta t} = 40$ , *on solde* le portefeuille; la part en actifs ne vaut plus que  $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$ , soit exactement de quoi rembourser la dette  $b_0 = 25$ . Si, pour  $t = \delta t$ , l’actif sous-jacent a évolué à la hausse et que  $S_{\delta t} = 120$ , nous avons vu dans l’exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter  $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$ ; comme il y a déjà  $\frac{5}{8}$  d’actifs dans le portefeuille, il convient d’en *racheter*  $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$  au prix unitaire  $S_{\delta t} = 120$ , donc pour une valeur de  $\frac{10}{48}120 = 25$ , que l’on emprunte, ce qui porte la dette totale à  $25 + 25 = 50$ , comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu’à l’échéance sa valeur soit exactement celle de l’option  $(100, 0, \text{ou } 0 \text{ selon les valeurs de } S_{2\delta t})$  : c’est le principe de la couverture dynamique.

**Remarque :** On peut à présent comprendre pourquoi le mécanisme de couverture dynamique d’une option décrit dans cette leçon est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d’incendie : dans le cas d’une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu’il a de la dynamique de l’actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d’un seul contrat, et même le couvrir exactement, c’est-à-dire le faire disparaître. Dans le cas d’une assurance

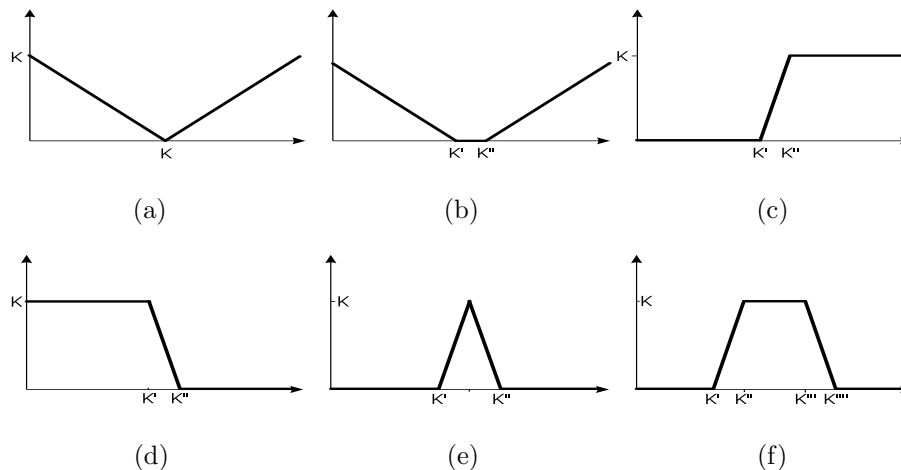


FIG. 1.5 – Fonctions de paiement (ou pay-off) de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor. Exercice : après avoir étudié la définition d'un call et d'un put, indiquer comment au moyen d'achat et de vente de call et de put on peut synthétiser les options définies par les pay-off de cette figure.

classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire face à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanément est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grâce à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ; l'acheteur, quant à lui, n'a pas nécessairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

**Remarque :** Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille  $(a_0, b_0)$  adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec  $5/8$ ième d'actif  $S_t$  et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

- $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$ , si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
- $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$ , si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
- $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$ , si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de 12,5.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.



## Chapitre 2

# Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein

L'objet de cette leçon est de généraliser le calcul du prix d'une option d'un modèle à une ou deux étapes à un modèle à  $n$  étapes, appelé *modèle de Cox, Ross et Rubinstein* ou *modèle binomial*. Cela conduira à une formule générale de prix d'option, appelée *formule fondamentale* que l'on obtient grâce à l'introduction de la *probabilité risque-neutre*, une probabilité permettant le calcul du prix d'un portefeuille de couverture. Ce sera aussi l'occasion d'aborder la notion d'*opportunité d'arbitrage*.

### 2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée  $S_t$  sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué (par exemple un dépôt d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée  $B_t$ .

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979<sup>1</sup> de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

- Pour une suite finie de  $n$  instants régulièrement répartis entre 0 et  $T$ ,  $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, n\delta t = T\}$ , où  $\delta t > 0$  est un réel fixé (supposé petit), la valeur  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné  $S_0$  à l'instant  $t = 0$ , et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant  $t \in \mathbb{T} \setminus \{n\delta t\}$  est  $S_t$ , alors sa valeur à l'instant  $t + \delta t$  sera soit  $S_t u$  soit  $S_t d$ , où  $u$  et  $d$  sont des constantes qu'on supposera telles que  $0 < d < u$ . Donc  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant  $t = k\delta t \in \mathbb{T}$ , présente  $k + 1$  noeuds ou  $k + 1$  valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \dots, k\}$$

l'indice  $j$  représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t = k\delta t$  ( $j$  est nombre de “up”), l'ordre des “up” et des “down” n'important pas.

- Pour la même suite d'instants  $\mathbb{T}$ , l'actif non risqué vaut  $B_0 = 1$  à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence  $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$ , soit  $B_t = e^{rt}$ , où  $r$  désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période  $[0, T]$ .

---

<sup>1</sup>Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendamment par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrète et continue. L'approche en temps continu présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul. Mais l'approche discrète exposée ici, au delà de ses vertus pédagogiques, est parfois plus à même de modéliser des situations subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révéler trop limitative. Remarquons que la question du calcul des prix d'options peut également être abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1995)). Le lien entre les deux approches, équations aux dérivées partielles/modèles aléatoires continus, est aujourd'hui bien compris.

## 2.2 Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , d'échéance  $T = n\delta t$  et de prix d'exercice  $K$ . Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif  $S_t$  à la date  $T$  au prix  $K$ . La valeur de cette option à l'instant final (son *paye off*) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \text{Max}(S_T - K, 0) \quad (2.1)$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut  $S_0 u^j d^{n-j}$  à l'instant final, pour un certain  $j \in \{0, \dots, n\}$ , le call vaudra  $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$  pour ce même  $j$ .

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille  $\Pi_t$  par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues  $\Pi_0$ ,  $a_0$ , et  $b_0$ , prix initial et composition initiale, à la donnée de son *paye off*  $(S_T - K)^+$ . Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date  $t$ , lorsque le sous-jacent prend la valeur  $S_t$ , le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent  $S_t$ , et d'une certaine quantité de placement non-risqué  $B_t$ . Comme sa composition a été arrêtée à l'instant  $t - \delta t$  (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que  $S_{t-\delta t}$ , et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date  $t$ , nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta \Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t) - (a_{t-\delta t} S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t} B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t} \delta S_t + b_{t-\delta t} \delta B_t \quad (2.2)$$

où  $\delta S_t$  et  $\delta B_t$  sont des notations pour les différences  $S_t - S_{t-\delta t}$  et  $B_t - B_{t-\delta t}$ . On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par  $S_t$ , mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date  $t$  devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t B_t \quad (2.3)$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement*. On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par  $S$  la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant  $t$ , par  $\Pi$  ( $\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t$ ) celle correspondante du portefeuille et par  $B$  celle de  $B_t$ . Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain"  $Su$  et  $Sd$ , d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons  $\Pi^u$  et  $\Pi^d$ , supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition  $(a, b)$  comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} aSu + be^{r\delta t} B &= \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t} B &= \Pi^d \end{aligned}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t} \frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u - d)}. \quad (2.4)$$

On pose alors  $a_t = a$  et  $b_t = b$  et on en déduit la valeur cherchée  $\Pi_t$ , par la formule  $\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t$ . On a donc la proposition suivante :

**Proposition 2.1** *Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, toute option d'échéance  $T$  et de fonction de paiement  $\varphi(S_T)$  est duplicable, c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

**Preuve :** On raisonne par récurrence sur le nombre  $n$  d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape; pour un modèle à  $n$  étapes, on remarque simplement que, comme  $S_t$  prend deux valeurs  $S_0 u$  et  $S_0 d$  à l'instant  $\delta t$ , ces deux valeurs sont chacune les valeurs initiales d'un modèle à  $n - 1$  étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture  $\Pi_{\delta t}^u$  et  $\Pi_{\delta t}^d$  avec lesquels on peut alors calculer  $\Pi_0$  (et donc  $C_0$ ) comme dans un modèle à une étape.  $\square$

## 2.3 Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations)? Nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille  $\Pi = aS + bB$  en utilisant les solutions  $(a, b)$  trouvées en (2.4), on voit facilement qu'on peut réécrire  $\Pi$  comme une fonction de  $\Pi^u$  et  $\Pi^d$ , sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \quad (2.5)$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \quad (2.6)$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que  $p + q = 1$  et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que  $0 < d < e^{r\delta t} < u$ , ces quantités  $p$  et  $q$  vérifient aussi  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$ . Donc si l'on considère que  $\Pi^u$  et  $\Pi^d$  sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernoulli  $\Pi$  avec  $P(\Pi = \Pi^u) = p$  et  $P(\Pi = \Pi^d) = q$  alors l'équation (2.5) affirme simplement que  $\Pi$  est précisément le produit par le *facteur d'actualisation*,  $e^{-r\delta t}$ , de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs  $p$  et  $q$  ainsi définies se calculent directement en fonction de  $u$ ,  $d$  et  $r$ , donc à partir des données du modèle choisi  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \quad (2.7)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

On appelle *probabilité risque-neutre* la probabilité  $(p, 1 - p)$  et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité de calcul*, ou encore *probabilité de martingale* pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent  $(S_t)$  d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque  $t \in \mathbb{T}$ , les  $k + 1$  valeurs  $\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \dots, k\}$  que peut prendre  $S_t$  sont les  $k + 1$  valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(S_t = s S_0 u^j d^{k-j}) = \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}. \quad (2.8)$$

En effet la valeur  $S_0 u^j d^{k-j}$  atteinte par  $S_t$  correspond à une trajectoire qui présente  $j$  "montées" et  $k - j$  "descentes" dont la probabilité est  $p^j (1-p)^{k-j}$  si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement  $\binom{k}{j}$  trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.5) et (2.6), ainsi que les propriétés des coefficients du binôme :

**Proposition 2.2** *Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne  $(T, \varphi(S_T))$  est donnée par*

$$e^{-rT} \mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \varphi(S_0 u^j d^{n-j}) \quad (2.9)$$

*c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si  $\varphi(S) = (S - K)^+$ , on a*

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$$

*et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si  $\varphi(S) = (K - S)^+$ , on a*

$$P_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (K - S_0 u^j d^{n-j})^+.$$

La formule (4.3) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox, Ross, et Rubinstein.

**Exemple :** Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime  $C_0$  peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation  $S = pSu + (1-p)Sd$  (on a supposé  $r = 0$ ); on obtient  $p = \frac{1}{2} = 1-p$ ; puis on calcule  $C_0$  comme l'espérance  $C_0 = 100P(S_T = 180) + 0P(S_T = 60) + 0P(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$ .

**Remarque :** Notons que si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

## 2.4 Hypothèses du modèle

La formule fondamentale ci-dessus (formule (4.3)) a été obtenue sous l'hypothèse explicite que le modèle choisi pour la dynamique de l'actif sous-jacent est le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. Mais il y a en fait d'autres hypothèses, économiques, qui ont été faites implicitement, et que nous allons étudier à présent.

- La plus irréaliste, mais difficilement contournable, est celle que l'on appelle l'hypothèse de *marché parfait*. Elle suppose d'une part que le marché est *infiniment liquide* : à tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché; elle suppose aussi qu'il n'y a aucune contrainte sur les quantités d'actifs achetés ou vendus (opérations nécessaires pour assurer la couverture dynamique des options); en particulier, les titres sont supposés infiniment divisibles, et les agents sans limitation de découvert. Enfin un marché parfait suppose aussi l'absence de coûts de transaction ainsi que l'égalité des prix à l'achat et à la vente (pas de fourchette bid-ask). L'hypothèse de marché parfait est une hypothèse théorique, évidemment non satisfaite dans la pratique, qu'il convient de considérer comme "satisfaite en première approximation", un peu comme l'hypothèse de gaz parfait en physique. Les modèles mathématiques plus élaborés que le modèle CRR cherchent parfois à s'en affranchir sur tel ou tel aspect. Mais il faut reconnaître que, pour l'essentiel, on ne sait pas le faire aujourd'hui de façon satisfaisante et qu'il reste beaucoup à améliorer dans cette direction.
- La seconde hypothèse est celle, déjà mentionnée, de *taux d'escompte monétaire constant*. Nous avons par exemple supposé qu'un actif valant  $S_t$  à l'instant  $t$  a une valeur actuelle, en  $t = 0$ , égale à  $e^{-rt}S_t$ . Or, durant la période  $[0, t]$ , le taux d'escompte varie en réalité et ce qui pourrait être une approximation raisonnable si  $t$  était très petit, cesse d'être valable lorsque  $t$  devient appréciable. Les modèles plus élaborés font parfois l'hypothèse d'un taux d'escompte stochastique et on peut alors, moyennant le choix d'un modèle mathématique pour la dynamique des taux, intégrer dans la probabilité de calcul, et donc dans l'évaluation des prix d'option par la formule fondamentale, la présence de taux variables.
- La troisième hypothèse est l'*absence de dividendes* versés par les actifs sous-jacents. En fait, il existe des modèles analogues au modèle CRR qui autorisent la prise en compte de dividende.
- La dernière hypothèse est probablement la plus importante : elle porte le nom d'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage* (simplement notée AOA) et joue un rôle essentiel.

**Définition :** Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille autofinçant nul en  $t = 0$  ( $\Pi_0 = 0$ ) et tel que  $\Pi_T \geq 0$  dans tous les états du monde et  $P(\Pi_T > 0) > 0$ .

**Proposition 2.3** Dans un marché dans lequel on fait l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles qui ont la même valeur à une date future  $T$ , ont la même valeur à toutes dates intermédiaires  $0 < t < T$ .

En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait former un portefeuille composé du premier  $\Pi_t$  (en crédit), du second  $-\tilde{\Pi}_t$  en débit, et d'une somme d'argent égale à la différence  $\alpha := \Pi_t - \tilde{\Pi}_t$  placée au taux  $r$ . Si par exemple on suppose, par l'absurde,  $\alpha > 0$ , alors ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage :

$t \in [0, T[$	$T$
$\Pi_t$	$\Pi_T$
$-\tilde{\Pi}_t$	$-\tilde{\Pi}_T$
$\alpha$	$\alpha e^{r(T-t)}$
$0$	$> 0$

L'hypothèse d'AOA permet aussi de justifier les inégalités qui ont été supposées satisfaites par l'actif risqué du modèle CRR :

$$0 < d < e^{r\delta t} < u. \quad (2.10)$$

En effet comme  $e^{r\delta t}$  est le rendement  $\frac{B_t}{B_0}$  de l'actif non risqué durant le laps de temps  $\delta t$ , et comme  $d$  et  $u$  sont les deux rendements possibles  $\frac{S_t}{S_0}$  de l'actif risqué sur le même laps de temps, si l'on avait  $d < u < e^{r\delta t}$  par exemple, on aurait une opportunité d'arbitrage :

$t$	$t + \delta t$
$-S_t$	$-S_t d$ ou $-S_t u$
$\alpha$	$\alpha e^{r\delta t}$
$0$	$S_t(e^{r\delta t} - d)$ ou $S_t(e^{r\delta t} - u)$

Car si  $\alpha$  est une somme d'argent égale à  $S_t$  et placée au taux  $r$ , le portefeuille représenté dans ce tableau est une opportunité d'arbitrage. On raisonnerait de façon analogue dans le cas  $e^{r\delta t} < d < u$ , avec  $+S_t$  et  $-\alpha$ .

**Remarque :** Une opportunité d'arbitrage est parfois appelée un *free lunch* (et l'hypothèse d'AOA, *no free lunch*), ce qui résume l'idée que sous cette hypothèse il n'y a pas de possibilité de gagner d'argent à coup sûr, c'est-à-dire sans prendre de risque.

**Remarque :** C'est encore un raisonnement d'AOA qui rend plausible l'unicité du prix de l'option. En effet nous avons choisi pour prix de l'option celui d'un portefeuille de couverture. Mais pourquoi n'y aurait-il pas une autre façon de s'y prendre qui conduirait à un prix différent, disons un prix moindre par exemple? En réalité ce n'est pas possible car si tel était le cas, un portefeuille comprenant l'option, vendue à un prix  $C_0$  strictement inférieur au prix du portefeuille de couverture  $\Pi_0$ , le portefeuille de couverture lui-même en débit et une somme  $\Pi_0 - C_0$ , serait une opportunité d'arbitrage comme l'indique le tableau suivant :

$t = 0$	$t = T$
$C_0$	$C_T$
$-\Pi_0$	$-\Pi_T$
$\Pi_0 - C_0$	$(\Pi_0 - C_0)e^{rT}$
$0$	$> 0$

Enfin une conséquence de l'AOA, importante dans la pratique, est la *relation de parité call-put* :

**Proposition 2.4** *Considérons un call  $C_t$  et un put  $P_t$  souscrits sur le même actif sous-jacent  $S_t$ , de même date d'échéance  $T$  et même prix d'exercice  $K$ . On a la relation de parité call-put suivante :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

**Preuve :** On applique la proposition 2.3 : les portefeuilles  $\Pi_t := C_t - P_t$  et  $\tilde{\Pi}_t := S_t - Ke^{r(T-t)}$  ont même valeur à l'échéance  $t = T$  puisque l'on a  $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$ .  $\square$



# Chapitre 3

## Marches aléatoires. Filtration et information

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques *stochastiques*, souvent plus pertinents ; les plus simples sont les *marches aléatoires* qui font l'objet de cette leçon. Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de  $n$  trajectoires possibles dont une seule se réalisera. L'ensemble des trajectoires possibles est muni d'une probabilité qui pourrait représenter la probabilité que la trajectoire se réalise, mais ce ne sera pas notre point de vue ici, et qui représentera le prix ou le coût qu'il convient d'attacher à la réalisation de cette trajectoire en terme de risque : c'est le point de vue auquel nous a conduit l'introduction de la probabilité de calcul.

### 3.1 Définitions et exemples

**Définition :** Soient  $\Omega$  un ensemble fini,  $\mathcal{F}$  une sous-tribu de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  une espace probabilisé fini et soit  $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \dots, n\delta t = T\}$ , où  $\delta t > 0$  est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire (finie)* une application  $(X)$  mesurable

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

Oublions provisoirement l'adjectif "mesurable" dont nous préciserons le sens plus loin et étudions tout d'abord un exemple :

**Exemple :** Le modèle CRR que nous avons déjà étudié fournit un premier exemple de marche aléatoire : elle modélise la dynamique de l'actif sous-jacent à une option. L'espace probabilisé fini  $\Omega$  considéré est l'ensemble à  $2^n$  éléments  $\Omega = \{-1, 1\}^n$  ; un évènement  $\omega \in \Omega$  est une suite finie de  $\pm 1$  qui représentent la succession des  $n$  mouvements vers le haut (up) ou vers le bas (down) de l'actif. En introduisant la probabilité de calcul, nous avons posé, pour un  $\omega \in \Omega$  qui comporte  $j$  composantes égales à  $+1$  (et  $(n-j)$  égales à  $-1$ ),

$$P(\omega) := p^j (1-p)^{n-j},$$

faisant implicitement une hypothèse d'indépendance des accroissements sur laquelle nous reviendrons. La tribu  $\mathcal{F}$  est ici simplement la tribu pleine  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . La marche aléatoire CRR, notée  $(S)$  est définie sur  $\Omega \times \mathbb{T}$  par la formule suivante, lorsque  $\omega$  comporte  $j$  composantes égales à  $+1$  et  $t = i\delta t$  :

$$(\omega, t) \mapsto S_t(\omega) := S_0 u^j d^{i-j}.$$

Il y a deux façons de voir une marche aléatoire  $(X)$  et c'est précisément ce qui fait la richesse de cette notion :

1. Si on fixe un  $\omega \in \Omega$ , l'application  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $t \in \mathbb{T}$  associe  $X_t(\omega)$  est une fonction de  $t$  qu'on appelle la *trajectoire* de l'état du monde  $\omega$  et qui représente l'une des évolutions au cours du temps

de la quantité modélisée, celle qui correspond à  $\omega$ . On peut munir chaque trajectoire  $t \mapsto X_t(\omega)$  d'une probabilité en posant

$$P(t \mapsto X_t(\omega)) := P(\bar{\omega})$$

où  $\bar{\omega}$  est l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  qui conduisent à la même trajectoire. Une marche aléatoire peut donc être vue comme *un espace probabilisé de trajectoires*. Par exemple dans le modèle CRR à  $n = 3$  étapes, l'espace  $\Omega$  comporte 8 évènements élémentaires,  $\omega_1 = (+1, +1, +1)$ ,  $\omega_2 = (+1, +1, -1)$ ,  $\omega_3 = (+1, -1, +1)$ ,  $\omega_4 = (+1, -1, -1)$ ,  $\omega_5 = (-1, +1, +1)$ ,  $\omega_6 = (-1, +1, -1)$ ,  $\omega_7 = (-1, -1, +1)$ , et  $\omega_8 = (-1, -1, -1)$  et il y a 8 trajectoires notées  $\gamma_i$  :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u^3)) \\ \gamma_2 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_3 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_4 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\ \gamma_5 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_6 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\ \gamma_7 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 d^2) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\ \gamma_8 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 d^2) ; (3\delta t, S_0 d^3)) \end{aligned}$$

2. Si on fixe un  $t \in \mathbb{T}$ , l'application  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $\omega \in \Omega$  associe  $X_t(\omega)$  est une variable aléatoire; la marche aléatoire définit donc pour chaque  $t$  une v.a.. On peut donc aussi voir une marche aléatoire comme *une famille à un paramètre  $t$  de v.a.* Dans l'exemple du modèle CRR à 3 étapes, ces v.a. sont  $S_0$  (qui est la v.a. certaine égale à la constante  $S_0$ ),  $S_{\delta t}$ ,  $S_{2\delta t}$  et  $S_{3\delta t}$  dont les lois sont données respectivement par les tableaux suivants :

$$\begin{array}{c} \frac{S_{\delta t}}{P(S_{\delta t} = \cdot)} \left| \begin{array}{cc} S_0 d & S_0 u \\ (1-p) & p \end{array} \right. \\ \frac{S_{2\delta t}}{P(S_{2\delta t} = \cdot)} \left| \begin{array}{ccc} S_0 d^2 & S_0 d u & S_0 u^2 \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \end{array} \right. \\ \frac{S_{3\delta t}}{P(S_{3\delta t} = \cdot)} \left| \begin{array}{cccc} S_0 d^3 & S_0 d^2 u & S_0 d u^2 & S_0 u^3 \\ (1-p)^3 & 3p(1-p)^2 & 3p^2(1-p) & p^3 \end{array} \right. \end{array}$$

## 3.2 La marche de Wiener et ses dérivées

La marche aléatoire la plus utilisée est la marche de Wiener dont l'importance tient notamment au fait que sa "limite" quand  $\delta t$  tend vers 0 est le fameux *processus stochastique* appelé mouvement brownien. On va définir la marche de Wiener au moyen de ses accroissements.

**Définition :** Soit  $(X)$  une marche aléatoire (m.a.). On appelle *accroissements* de  $(X)$  la marche aléatoire définie pour tout  $t \in \mathbb{T} - \{0\}$  par

$$\delta X_t := X_t - X_{t-\delta t}$$

**Définition :** Une m.a.  $(X)$  est dite à *accroissements indépendants* si elle est telle que les v.a.  $(\delta X_t, t \in \{\delta t, \dots, n\delta t\})$  forment une famille de v.a. indépendantes.

La plupart des m.a. que nous étudierons auront la propriété d'être à accroissements indépendants. C'est le cas par exemple de la marche CRR. A noter que, par contre, la m.a. CRR elle-même, c'est-à-dire la famille  $(S_t, t \in \{0, \delta t, \dots, n\delta t\})$ , n'est pas une famille de v.a. indépendantes : ce qui est vrai pour ses accroissements n'est pas vrai pour la marche elle-même.

Notons aussi que la donnée d'une m.a.  $(X)$  à accroissement indépendants équivaut à la donnée de sa valeur à l'instant  $t = 0$  et de la m.a. de ses accroissements  $(\delta X)$ .

**Définition :** Soient  $\Omega = \{-1, +1\}^n$ ,  $0 < p < 1$  et  $\delta t > 0$  un réel fixé. On appelle *p-marche de Wiener* (ou simplement *marche de Wiener* lorsque  $p = \frac{1}{2}$ ) la m.a. à accroissements indépendants définie pour tout  $t \in \mathbb{T} - \{0\}$  par

$$\begin{cases} W_0 &= 0 \\ \delta W_t &= \pm \sqrt{\delta t} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $P(\delta W_t = \sqrt{\delta t}) = p$  et  $P(\delta W_t = -\sqrt{\delta t}) = 1 - p$ . On vérifie facilement que  $\mathbb{E}(\delta W_t) = (2p - 1)\sqrt{\delta t}$  et  $\text{Var}(\delta W_t) = 4p(1 - p)\delta t$  (et donc  $\mathbb{E}(\delta W_t) = 0$  et  $\text{Var}(\delta W_t) = \delta t$  pour  $p = \frac{1}{2}$ ).

A partir de la marche de Wiener, on peut définir d'autres marches aléatoires :

**Définition :** On appelle *p-marche de Wiener avec dérive* la marche aléatoire définie par

$$\begin{cases} X_0 &= x_0 \\ \delta X_t &= \mu\delta t + \sigma\delta W_t, \end{cases} \quad (3.2)$$

et *p-marche de Wiener géométrique* la marche aléatoire définie par

$$\begin{cases} X_0 &= x_0 \\ \delta X_t &= X_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_{t-\delta t}). \end{cases} \quad (3.3)$$

En fait la marche de Wiener géométrique est un exemple de marche CRR pour laquelle  $u = 1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}$  et  $d = 1 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}$ . On pourra vérifier facilement que si  $r = \mu$ , les inégalités  $0 < d < e^{r\delta t} < u$  sont satisfaites pourvu que  $\delta t$  soit suffisamment petit.

### 3.3 Filtration et information

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer à toute marche aléatoire une filtration et pourquoi il est naturel de considérer que cette filtration, comme le font souvent les praticiens en finance, représente l'information disponible sur le marché à un instant donné.

Soient  $\Omega^1, \dots, \Omega^m$  des parties non vides de  $\Omega$ . On dit que  $\mathfrak{P} := \{\Omega^1, \dots, \Omega^m\}$  est une *partition* de  $\Omega$  si et seulement si les  $\Omega^i$  sont deux-à-deux disjoints et  $\Omega$  est la réunion des  $\Omega^i$ .

La relation  $\sim$  sur  $\Omega$  définie par  $\omega' \sim \omega''$  si et seulement si  $\omega'$  et  $\omega''$  appartiennent à un même  $\Omega^i \in \mathfrak{P}$  est une relation d'équivalence. Réciproquement, si  $\sim$  est une relation d'équivalence quelconque sur  $\Omega$ , les classes d'équivalences  $\bar{\omega} = \{\omega' \in \Omega \mid \omega' \sim \omega\}$  des éléments de  $\Omega$  constituent une partition de  $\Omega$ .

**Définition :** Lorsque  $\Omega$  est l'espace probabilisé sous-jacent à une marche aléatoire  $(X)$ , on peut définir sur  $\Omega$ , pour chaque  $t \in \mathbb{T}$ , des partitions, que nous noterons  $\mathfrak{P}_t$ , associées à la marche aléatoire, par la relation d'équivalence  $\overset{t}{\sim}$  suivante :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega'' \text{ si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega'') \text{ pour tout } \tau \in [0..t]$$

En d'autres termes, deux états du monde sont *équivalents jusqu'à l'instant t* si les trajectoires qui leurs sont associées coïncident jusqu'à l'instant  $t$ .

**Exemple :** Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on a :

- si  $t = 0$ ,  $\mathfrak{P}_0 = \{\Omega\}$ .
- si  $t = \delta t$ ,  $\mathfrak{P}_{\delta t} = \{\Omega^1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$ .
- si  $t = 2\delta t$ ,  $\mathfrak{P}_{2\delta t} = \{\Omega^{11} = \{\omega_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{\omega_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$ .
- si  $t = 3\delta t$ ,  $\mathfrak{P}_{3\delta t} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$ .

**Définition :** Soit  $\Omega$  un ensemble fini et  $\mathcal{F}$  une tribu de parties de  $\Omega$ . On appelle *atome* de  $\mathcal{F}$  tout élément de  $\mathcal{F}$  qui ne contient pas d'autre élément de  $\mathcal{F}$  que lui-même et l'ensemble vide.

On démontre facilement la proposition suivante en appliquant les définitions de partition et de tribu :

**Proposition 3.1** *Dans un ensemble  $\Omega$  fini, on peut associer à toute partition  $\mathfrak{P}$  la tribu engendrée par les éléments  $\Omega^i$  de la partition et réciproquement on peut associer à toute tribu la partition formée par ses atomes.*

**Exemple :** Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition  $\mathfrak{P}_t$ , une tribu, notée  $\mathcal{F}_t$  :

- si  $t = 0$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .
- si  $t = \delta t$ ,  $\mathcal{F}_{\delta t} = \{\emptyset, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$ .
- si  $t = 2\delta t$ ,  $\mathcal{F}_{2\delta t} = \{\emptyset, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \dots, \Omega\}$ .
- si  $t = 3\delta t$ ,  $\mathcal{F}_{3\delta t} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

Et on a évidemment  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$ . Cette suite croissante de tribus est appelée une *filtration*.

En généralisant l'exemple précédent, on comprend facilement qu'il est possible d'associer à toute marche aléatoire  $(X)$  une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  définie de la façon suivante : pour un  $t$  donné, les atomes de la tribu  $\mathcal{F}_t$  sont constitués des états du monde  $\omega \in \Omega$  auxquels sont associés des trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$ .

Lorsque  $t = 0$ , l'information dont on dispose est que l'un des états du monde  $\omega \in \Omega$  va se réaliser (mais on ne sait pas lequel). A l'instant  $t = \delta t$ , l'actif que l'on modélise à fait soit un mouvement vers le haut soit un mouvement vers le bas et donc on sait, ayant pu observer cette évolution, que l'état du monde qui se réalisera appartient à  $\Omega^1$  ou bien à  $\Omega^2$ . Et à l'instant  $t = 2\delta t$ , on saura qu'il appartient à  $\Omega^{11}$ ,  $\Omega^{12}$ ,  $\Omega^{21}$  ou  $\Omega^{22}$ , et ainsi de suite. A chaque nouvelle étape l'information dont on dispose sur l'actif observé augmente et on peut mesurer la finesse de cette information par la partition  $\mathfrak{P}_t$  ou bien, ce qui revient au même, par la tribu  $\mathcal{F}_t$ . La suite de ces tribus,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  représente donc *l'information dont on dispose à la date  $t$  en observant le marché*.

La raison pour laquelle on parle plus souvent de la filtration des tribus  $\mathcal{F}_t$  plutôt que de la famille des partitions  $\mathfrak{P}_t$  est que, lorsqu'on voudra remplacer les modèles finis étudiés ici par des modèles continus, où  $\Omega$  est supposé infini, la filtration continuera à être bien définie alors que la partition ne le sera plus.

# Chapitre 4

## Espérance conditionnelle

Dans les leçons précédentes nous avons appris à calculer le prix de diverses options à l'instant  $t = 0$ . Les options étant des actifs financiers négociables, qu'on veut pouvoir acheter et vendre aussi à des instants ultérieurs, on voudrait également savoir calculer leur prix à des instants  $t > 0$ . C'est ce que nous allons faire dans cette leçon grâce à la notion d'*espérance conditionnelle par rapport à une tribu*. On découvrira au passage que cette espérance conditionnelle, qui généralise l'espérance conditionnelle usuelle d'une variable aléatoire par rapport à un événement, est en fait un extraordinaire outil de calcul, un de ceux qui font que la théorie des probabilités s'appelle souvent le *calcul* des probabilités.

### 4.1 Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un événement

Voici tout d'abord quelques rappels de probabilités élémentaires. Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé que nous supposons comme précédemment *fini* et satisfaisant en outre la condition suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) \neq 0.$$

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . L'espérance de  $X$  est le *nombre*  $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ . Notons que, pour tout événement  $A \subseteq \Omega$  appartenant à la tribu  $\mathcal{T}$ , on peut exprimer la probabilité de  $A$  comme l'espérance d'une v.a., en posant  $P(A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) = \mathbb{E}\mathbb{I}_A$ , où  $\mathbb{I}_A$  désigne l'indicatrice de  $A$ , égale à 1 sur  $A$  et 0 sinon.

Plus généralement, on appelle "espérance de  $X$  sachant  $A$ " ou "espérance de  $X$  conditionnellement à  $A$ ", le *nombre*, notée  $\mathbb{E}(X/A)$ , donné par

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\alpha \in A} X(\alpha)P(\alpha) = \frac{\mathbb{E}X\mathbb{I}_A}{\mathbb{E}\mathbb{I}_A}.$$

En d'autres termes  $\mathbb{E}(X/A)$  est la moyenne, pondérée par les probabilités des éléments de  $A$  rapporté à la probabilité de  $A$ , des  $X(\alpha)$  pour  $\alpha \in A$ .

Nous insistons sur le fait que l'espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un événement est un nombre. L'espérance conditionnelle par rapport à une tribu, que nous allons introduire à présent, n'est pas *un* nombre, mais "un nombre qui dépend de l'état du monde", c'est-à-dire une variable aléatoire.

### 4.2 Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu

Soient  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$  une tribu et  $\mathcal{Q} := \{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$  la partition de  $\Omega$  formée par les atomes de  $\mathcal{F}$ .

**Définition :** Soit  $X$  est une v.a. sur  $\Omega$ . On appelle *espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à la tribu  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$* , ou encore *espérance conditionnelle de  $X$  relativement à la partition  $\mathcal{Q}$* , la v.a. notée  $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$  définie, pour tout  $\omega \in \Omega$ , par

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{F})(\omega) := \mathbb{E}[X/\bar{\omega}] = \frac{1}{P(\bar{\omega})} \sum_{\alpha \in \bar{\omega}} X(\alpha)P(\alpha)$$

où  $\bar{\omega}$  désigne l'atome  $\Omega_i \in \mathcal{Q}$  de la partition tel que  $\omega \in \Omega_i$ .

On voit donc que par définition l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu  $\mathcal{F}$  est une v.a. constante sur les atomes  $\Omega_i$  de la partition associée à  $\mathcal{F}$ . On a plus précisément :

**Proposition 4.1** *La v.a.  $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{T}$  et de plus si  $Y$  désigne cette v.a., ( $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ ), alors  $Y$  peut être définie comme l'unique v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable telle que*

$$\forall \Omega_i \in \mathcal{Q} \quad , \quad \mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i). \quad (4.1)$$

**Preuve :** Le fait que  $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$  soit mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{T}$  est clair par définition puisqu'elle est constante sur les atomes de la partition  $\mathcal{Q}$ .

Montrons qu'elle vérifie l'équation (4.1) : on a

$$\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} Y(\alpha)P(\alpha) = \frac{1}{P(\Omega_i)} Y(\omega) \sum_{\omega \in \Omega_i} P(\omega) = Y(\omega)$$

où  $\omega$  est un élément quelconque de l'atome  $\Omega_i$ , puisque  $Y$  est constante sur les atomes. D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} X(\alpha)P(\alpha) = Y(\omega)$$

pour tout  $\omega \in \Omega_i$ , par définition de  $Y$ . Réciproquement si  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, la relation  $\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i)$  définit  $Y$  uniquement car, pour tout  $\omega \in \Omega$ , on posera  $Y(\omega) := \mathbb{E}(X/\Omega_i)$ , où  $\Omega_i$  est l'atome contenant  $\omega$ .  $\square$

Voici les principales propriétés de l'espérance conditionnelle :

**Proposition 4.2** *Soient  $X$  et  $Y$  des v.a. sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des sous-tribus de  $\mathcal{T}$ ,  $x_0, a$  et  $b$  des nombres réels. On a :*

1.  $\mathbb{E}(X|\mathcal{T}) = X$ , et  $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X)$ .
2.  $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ .
3. Si  $X \geq 0$ , on a  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $X = 0$ .
4.  $\mathbb{E}(x_0|\mathcal{F}) = x_0$ .
5. Si  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, on a  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
6. Si  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ . En particulier  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$ .

Cette sixième propriété s'appelle la transitivité des espérances conditionnelles. Elle est d'un usage fréquent en finance.

### 4.3 L'espace euclidien $L^2(\Omega)$

On désigne par  $L^2(\Omega)$  l'ensemble des variables aléatoires sur  $\Omega$  dans le cas où on munit cet ensemble d'une structure euclidienne (c'est-à-dire d'un produit scalaire) que nous allons définir à présent. Cet espace de v.a. joue un rôle fondamental en économétrie et en calcul stochastique.

Tout d'abord, il est facile de munir l'ensemble des v.a. sur  $\Omega$  d'une structure d'espace vectoriel : si  $X$  et  $Y$  sont deux éléments de cet ensemble,  $X + Y$  et, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X$  sont encore des v.a. sur  $\Omega$ . D'autre part on peut définir un produit scalaire sur cet ensemble de la façon suivante :

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(XY) \quad (4.2)$$

et la norme associée par :

$$\|X\|^2 := \mathbb{E}(X^2)$$

En effet on vérifie facilement la bilinéarité et la symétrie ; de plus on a  $\|X\| \geq 0$  puisque  $X^2$  est une v.a. positive ou nulle ; enfin, si  $\|X\| = 0$ , alors  $X = 0$  car  $\mathbb{E}(X^2)$  est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs (puisque  $P(\omega) > 0$  pour tout  $\omega \in \Omega$ ) des nombres positifs.

On vérifie sans peine que l'on a  $\mathbb{E}(X) = \langle X, 1 \rangle$ ,  $Cov(X, Y) = \langle X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) \rangle$  et donc  $Var(X) = \langle X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X) \rangle = \|X - \mathbb{E}(X)\|^2$ .

L'espace  $L^2(\Omega)$  des variables aléatoires sur  $\Omega$ , muni du produit scalaire (4.2), est donc bien un espace euclidien. On sait que dans un espace euclidien on peut associer à tout vecteur sa projection orthogonale sur un sous espace. Rappelons la définition de la projection orthogonale :

**Définition :** Soient  $G \subseteq L^2(\Omega)$  un sous espace vectoriel et  $X \in L^2(\Omega)$  un vecteur quelconque. On appelle *projection orthogonale* de  $X$  sur  $G$ , notée  $\pi(X)$  l'unique élément de  $G$  tel que

$$\forall Z \in G, \quad \langle X - \pi(X), Z \rangle = 0$$

On peut vérifier facilement que si  $\mathcal{F}$  est une tribu alors l'ensemble des v.a. de  $L^2(\Omega)$   $\mathcal{F}$ -mesurables forment un sous espace vectoriel. En effet, si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables, donc constantes sur les atomes de la partition associée à la tribu  $\mathcal{F}$ , toute combinaison linéaires  $\lambda X + \mu Y$ , pour  $\lambda$  et  $\mu$  réels quelconques, est encore  $\mathcal{F}$ -mesurable.

**Proposition 4.3** Soient  $X$  une v.a. et  $\mathcal{F}$  une tribu. L'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à la tribu  $\mathcal{F}$  est la projection orthogonale de  $X$  sur le sous espace  $G$  des v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables.

**Preuve :** Soit  $Z \in G$ . En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle du théorème 4.2, on a :

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XZ/\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z)$$

donc  $\langle X - \mathbb{E}(X/\mathcal{F}), Z \rangle = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z) = 0$ . □

## 4.4 Application au calcul de prix d'options

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une marche aléatoire et soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  la filtration associée; rappelons que la filtration associée à une m.a. est par définition la suite croissante de tribus

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \dots \subset \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

définie de la façon suivante : pour chaque  $t \in \mathbb{T}$ , les atomes de la tribu  $\mathcal{F}_t$  sont les classes d'équivalence pour la relation :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega'' \quad \text{si et seulement si} \quad X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega'') \quad \text{pour tout } \tau \in [0, t].$$

Un exemple de la filtration associée à la marche CRR est détaillé à la fin de la leçon 3.

On a vu ci-dessus comment associer à une v.a.  $X$  son espérance par rapport à une tribu,  $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ . Si l'on dispose non plus d'une seule tribu mais de toute une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , on peut associer alors, à toute v.a.  $X$ , une famille, indexée par  $t \in \mathbb{T}$ , de variables aléatoires  $Y_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$ , c'est-à-dire une nouvelle marche aléatoire  $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ .

Prenons l'exemple d'une option européenne standard  $(T, \varphi(S_T))$  souscrite sur un actif  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . La fonction de paiement  $X := \varphi(S_T)$  est une v.a. sur l'ensemble des états du monde  $\Omega$  sur lequel est définie la m.a.  $(S_t)$ . On peut donc associer à l'option une nouvelle m.a. donnée par  $Y_t := \mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$ . Que représente  $Y_t$  par rapport à  $X = \varphi(S_T)$ ? Pour chaque état du monde  $\omega \in \Omega$ ,  $Y_t(\omega)$  est l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\bar{\omega}$ , où  $\bar{\omega}$  désigne l'atome de la tribu  $\mathcal{F}_t$ , c'est-à-dire l'ensemble des états du monde correspondant à des trajectoires de la marche  $(S_t)$  qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$ . En d'autres termes,  $Y_t(\omega)$  est la moyenne des paiements attendus sur toutes les trajectoires qui coïncident avec  $\omega$  jusqu'à l'instant  $t$ , ou la moyenne des paiements futurs sachant la trajectoire  $S_t$  jusqu'à l'instant  $t$ , c'est-à-dire connaissant l'information jusqu'à  $t$ . Notons que l'on a  $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_T) = \varphi(S_T)$  et  $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\varphi(S_T))$ .

Utilisant la notion d'espérance conditionnelle par rapport aux tribus d'une filtration, il est possible de calculer le prix d'une option, non seulement à l'instant  $t = 0$  mais à tout instant  $t \in \mathbb{T}$  : c'est la *formule fondamentale* qui généralise celle donnée au chapitre 2 pour  $t = 0$ .

**Proposition 4.4** Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où l'actif risqué  $S_t$  suit un modèle CRR et l'actif sans risque est donné par  $B_t := e^{rt}$ , le prix d'une option d'échéance  $T$  et de fonction de paiement  $\varphi(S_T)$  est la marche aléatoire  $(C_t)_{t \in \mathbb{T}}$  définie pour tout  $t \in \mathbb{T}$  par

$$C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t) \tag{4.3}$$

où  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est la filtration associée à la m.a. CRR  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  et où l'espérance conditionnelle est calculée sous la probabilité de calcul  $p$  définie par  $p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$ .

Une conséquence importante de cette proposition est que la m.a.  $(C_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , prix de l'option à l'instant  $t$  selon les états du monde possède la propriété suivante : pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , la v.a.  $C_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, où  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est la filtration associée à l'actif sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . On a même plus précisément l'existence d'une fonction (déterministe)  $C(t, S)$  telle que  $C_t = C(t, S_t)$ , pour tout  $t$  et tout état du monde. On peut représenter le graphe de cette fonction comme un *filet*, c'est-à-dire une fonction définie au dessus de chaque noeud de l'arbre  $(t, S_t)$  formé des diverses valeurs prises par les trajectoires de la marche  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . Sur la figure ci-dessous, on a représenté ce filet dans le cas d'une option Call; on peut voir que sa section verticale à l'instant  $t = T$  est bien le graphe du paye off d'un Call  $(S - K)^+$  et sa section à l'instant  $t = 0$  est un point  $C_0$ , l'écart vertical au point représentant  $S_0$ , d'ordonnée nul représentant la prime de l'option, c'est-à-dire son prix initial.

# Chapitre 5

## La formule de Black-Scholes

### 5.1 La formule exacte de CRR

**Notations :** On pose

$$\Phi(a, n, p) := \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

**Théorème 5.1 (formule de Cox-Ross-Rubinstein)**

Posons  $p^* := p_+ := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma} \sqrt{\delta t}$  et  $q^* = p_+ u_+ = p^*(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})$ . Soit

$$a := \text{Min} \{ j \in \mathbb{N} \mid S_0 u_-^j u_+^{n-j} > K \}.$$

On note  $C_0$  le prix  $\Pi_0$  du portefeuille de couverture d'une option call européenne. On a

$$C_0 := \mathbb{E}(S_T - K)^+ = S_0 \Phi(a, n, q^*) - K \Phi(a, n, p^*). \quad (5.1)$$

**Preuve :** Observons que, du fait de la relation de martingale (2.7)

$$S = p_+ S^+ + p_- S^- = p_+ S u_+ + p_- S u_-,$$

on a  $1 = p_+ u_+ + p_- u_-$ , et donc  $1 - q^* = 1 - p_+ u_+ = p_- u_-$ . A présent, par (??), on a

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}(S_T^* - K)^+ = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j} (S_0 u_+^j u_-^{n-j} - K)^+ \\ &= \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j} (S_0 u_+^j u_-^{n-j} - K) \\ &= S_0 \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} (u_+ p_+)^j (u_- p_-)^{n-j} - K \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j} \\ &= S_0 \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} q^{*j} (1-q^*)^{n-j} - K \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j} \\ &= S_0 \Phi(a, n, q^*) - K \Phi(a, n, p^*) \end{aligned}$$

□

### 5.2 Vers la formule de Black et Scholes

Nous souhaitons à présent trouver une estimation de  $C_0$  lorsque  $n$  est grand. Voici un résultat qui nous sera utile. Soulignons qu'il s'agit d'une égalité et non d'une approximation entre une somme finie et une intégrale, d'où le nom de "formule magique" que nous lui avons donné. Il s'agit d'une intégrale eulérienne de première espèce<sup>1</sup> (fonction Beta incomplète).

<sup>1</sup>Les intégrales eulériennes de seconde espèce font intervenir la fonction exponentielle, et débouchent, elles, sur la fonction gamma :  $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . Une intégration par partie montre facilement que  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ , et  $\Gamma(1) = 1$ , d'où  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Nous sommes reconnaissant à Adri Olde-Daaluus de l'université d'Edinbourg d'avoir attiré notre attention sur le parti qui peut être tiré des intégrales eulériennes de première espèce pour le calcul asymptotique.

**Proposition 5.2 (formule magique)** On a

$$\Phi(a, n, p) := \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = a \binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{n-a} dt. \quad (5.2)$$

**Preuve :** Posons  $\Phi(a) := a \binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{n-a} dt$ . On montre la proposition par récurrence descendante.

- Pour  $a = n$ , on a  $\Phi(n) = n \binom{n}{n} \int_0^p t^{n-1} dt = [t^n]_{t=0}^p = p = \Phi(n, n, p, 1)$ .
- Soit  $a < n$  et supposons la formule (5.2) vraie pour  $a + 1$ . Notons que

$$a \binom{n}{a} \frac{n-a}{a} = \frac{n!}{a!(n-a)!} (n-a) = (a+1) \frac{n!}{(a+1)!(n-(a+1))!} = (a+1) \binom{n}{a+1}.$$

A présent, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= a \binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{n-a} dt \\ &= a \binom{n}{a} \left( \left[ \frac{1}{a} t^a (1-t)^{n-a} \right]_{t=0}^{t=p} + \frac{n-a}{a} \int_0^p t^{(a+1)-1} (1-t)^{n-(a+1)} dt \right) \\ &= \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} + (a+1) \binom{n}{a+1} \int_0^p t^{(a+1)-1} (1-t)^{n-(a+1)} dt \\ &= \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} + \Phi(a+1) \\ &= \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} + \sum_{j=a+1}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \end{aligned} \quad \square$$

Au chapitre précédent, nous avons vu, qu'étant donné une discrétisation de  $[0, T]$  en  $n$  intervalles de longueur égale  $\delta t$ , comment calculer la valeur  $\Pi_0^{(n)}$  d'une option européenne. Dans le cas particulier d'une option call, caractérisée par un pay-off  $\varphi(S_T) = (S_T - K)^+$ , cette valeur  $C_0^{(n)}$  est donnée par la formule de Cox-Ross-Rubinstein (??)

$$C_0^{(n)} = e^{-rT} \mathbb{E} (S_T - K)^+ = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p_+^j p_-^{n-j} (S_0 u_+^j u_-^{n-j} - K)^+ = S_0 \Phi(a, n, q^*) - K e^{-rT} \Phi(a, n, p^*), \quad (5.3)$$

avec

$$a := \text{Min} \{ j \in \mathbb{N} \mid S_0 u_+^j u_-^{n-j} > K \} =: [J] + 1 \text{ où } J \text{ est défini par } S_0 \left( \frac{u_+}{u_-} \right)^J u_-^n = K,$$

$$u_{\pm} = 1 \pm \sigma \sqrt{\delta t} + \mu \delta t$$

$$p^* := p_+ := \frac{1}{2} + \frac{r - \mu}{2\sigma} \sqrt{\delta t} + \phi \sqrt{\delta t}, \quad q^* = p_+ u_+ e^{-r\delta t} = p^* (1 + \mu \delta t + \sigma \sqrt{\delta t}) (1 - (r + \phi) \delta t) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma} \sqrt{\delta t} + \phi \sqrt{\delta t},$$

$$\text{et } \Phi(a, n, p) := \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = a \binom{n}{a} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{n-a} dt, \quad (5.4)$$

compte tenu de la formule magique (5.2).

Il paraît souvent raisonnable de penser que le modèle de Cox, Ross, et Rubinstein est plus pertinent pour les grandes valeurs de  $n$ . Dans ce cas, une *approximation* naturelle de  $C_0^{(n)}$  est donnée par la limite  $C_0^* := \lim_{n \rightarrow \infty} C_0^{(n)}$ .

**Théorème 5.3 (Formule de Black-Scholes)** On pose  $\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi$ ,

$$d_+ := \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \text{ et } d_- := \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_+ - \sigma\sqrt{T}.$$

La limite  $C_0^* := \lim_{n \rightarrow \infty} C_0^{(n)}$  du prix du portefeuille de couverture d'une option call européenne est donnée par la formule

$$C_0^* = S_0\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_-). \quad (5.5)$$

Notons que  $C_0^*$  ne dépend pas de la valeur de  $\mu$ , ce qui fait dire aux financiers que ce qui se négocie sur le marché des options, c'est de la volatilité! Ceci peut se comprendre en termes économiques par la remarque que ce qui s'échange dans une option, c'est du risque, et que ce risque est mesuré par le terme aléatoire  $\pm\sigma\sqrt{\delta t}$ , c'est-à-dire par  $\sigma$ . Ceci n'explique toutefois pas entièrement la disparition de  $\mu$ ; en effet, selon la formule de Black et Scholes, il n'y aurait aucun risque attaché à une erreur de modèle qui serait issue, pour les calculs, d'une mauvaise estimation de la valeur du paramètre  $\mu$ . En fait, cette disparition est liée au fait que  $C_0^*$  est une approximation de  $C_0^{(n)}$  obtenue par passage à la limite sur  $n$ . Néanmoins, l'influence de la valeur de  $\mu$  est petite devant celle de  $\sigma$ , et on peut voir là une explication du succès du marché des produits financiers dérivés sur lequel la dynamique "hors risque" des entreprises cotées, mesurée par  $\mu$  et difficile à déterminer, joue un rôle secondaire. Une question serait de savoir si la présence du marché des dérivés a permis de mieux contrôler la dynamique de  $\sigma$  (supposée constante dans la théorie Black-Cox-Ross-Rubinstein-Scholes abordée ici).

Observons que le modèle CRR est fondé sur le choix  $u_{\pm} = 1 \pm \sigma\sqrt{\delta t} + \mu\delta t = 1 \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu T}{n}$ . Donc, quitte à remplacer  $\sigma$  par  $\sigma\sqrt{T}$  et  $\mu$  par  $\mu T$ , on peut, pour la preuve, supposer que  $T = 1$ .

Au vu des formules (5.3) et (5.4), on comprend que le calcul de la limite  $C_0^{(n)}$  peut se ramener à l'étude de l'asymptotique de  $a := a^{(n)}$ ,  $\binom{n}{a} := \binom{n}{a^{(n)}}$ , et de  $I(a, p) := I^{(n)}(a^{(n)}, p^{(n)}) := \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt$ , pour  $p := p^{(n)}$  et  $q := q^{(n)}$  à laquelle sera consacré l'essentiel de ce chapitre.

### 5.3 Rappels d'asymptotique infinitésimale

A noter que, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $a = a^{(n)}$  tend vers l'infini, ainsi que  $\binom{n}{a} = \binom{n}{a^{(n)}}$ , alors que  $I(a, p) = I^{(n)}(a^{(n)}, p^{(n)})$  tend vers 0. L'asymptotique ne se borne pas à calculer des limites, elle s'intéresse à la manière de s'approcher de cette limite, "comme"  $cn$ ,  $c\sqrt{n}$ ,  $c/\sqrt{n}$ , ou  $c/n$  par exemple. Classiquement, ceci se fait en introduisant des fonctions  $o(n)$ ,  $o(\sqrt{n})$ ,  $o(1/\sqrt{n})$ , ou  $o(1/n)$  pour résumer le terme d'erreur, et  $\varepsilon(n)$  pour représenter ce qui tend vers zéro.

Ici, nous allons utiliser les méthodes de l'analyse infinitésimale (formalisée), qui découlent de l'Analyse Non Standard (ANS), une théorie mathématique sophistiquée branche de la Logique Mathématique. L'analyse infinitésimale cherche avant tout à tirer de l'ANS une notion primitive d'ordre de grandeur sur les nombres, qui n'existe dans les mathématiques traditionnelles que par l'introduction, à la place des nombres, de fonctions d'un ou plusieurs paramètres, ici  $n$ . Elle atteint ce résultat par l'introduction d'un mot : *standard*<sup>2</sup>. L'application de l'analyse infinitésimale peut alors supposer standard tous les paramètres libres du problème : ici  $S_0$ ,  $K$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ , et  $T$ . On fixe alors  $n$  à une valeur i-grande, ce qui fixe également les valeurs de  $a$ ,  $p^*$ , etc... d'où l'allègement de l'écriture que nous avons adoptée. Comme  $S_0\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-)$  est standard (voyez-vous pourquoi?), il convient de montrer que  $C_0 - C_0^*$  est i-petit.

Bien des résultats de l'analyse infinitésimale se traduisent immédiatement en équivalent classique et réciproquement; nous les appelons des résultats d'analyse infinitésimale élémentaires. D'autres n'ont pas d'équivalent classique, non que ceux-ci ne peuvent pas exister, mais ils perdent alors leur simplicité<sup>3</sup>.

Voici les résultats d'analyse infinitésimale élémentaire que nous allons utiliser. Rappelons qu'un nombre réel peut être i-petit ( $\phi$ ), limité ( $\pounds$ ), ou i-grand. S'il est limité et non i-petit, il est dit appréciable

<sup>2</sup>Essentiellement, une quantité sera standard dès lors qu'elle est indépendante de toute valeur d'un paramètre caché, comme l'est tout objet des mathématiques défini de manière unique : 0, 1,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ , +, \*, exp sont standard, mais tout ensemble infini contient nécessairement des éléments *non-standard*. Dans  $\mathbb{N}$  ces éléments non-standard se regroupent : ils sont tous plus grands que les éléments standard; ceci permet de les choisir pour définir la notion d'infiniment grand (i-grand). Si  $n$  est i-grand,  $1/n$  est i-petit; 2 est standard car  $2 = 1 + 1$ , mais  $2 + \frac{1}{n}$  ne l'est pas, sinon  $n = 1/(2 + \frac{1}{n} - 2)$  le serait. De façon générale  $x$  est i-petit si et seulement si  $|x| \leq \frac{1}{m}$  pour tout entier  $m$  standard.

<sup>3</sup>mais ceci est bien-entendu une affaire de goût.

(@)<sup>4</sup>. Tout réel standard est limité ( $2 + \frac{1}{n}$  montre que la réciproque est fautive) et 0 est le seul réel standard i-petit ; les autres réels standard sont donc appréciables. On a

$$\phi + \phi = \phi \quad ; \quad \phi \mathcal{L} = \phi \quad ; \quad \frac{\phi}{@} = \phi \quad ;$$

Si  $\varepsilon$  est i-petit, alors

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon(1+\phi) \text{ et donc } \frac{1}{1+\phi} = 1 + \phi \quad ; \quad \ln(1+\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{2} + \phi \right) = \varepsilon \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\phi \right) = \varepsilon(1+\phi).$$

Si  $N$  est i-grand et  $x$  limité, alors

$$\left( 1 + \frac{x}{N} \right)^N = e^x(1+\phi) \quad ;$$

$$e^{x+\phi} = e^x e^\phi = e^x(1+\phi) \quad ;$$

$$N! = N^N e^{-N} \sqrt{2\pi} \sqrt{N} (1+\phi) \text{ (Formule de Stirling)}^5$$

Voici un résultat d'analyse infinitésimale non élémentaire :

**Proposition 5.4** *Soit  $Y_-$  i-grand négatif,  $b$  limité, et  $B \simeq b$  standard. Supposons qu'il existe des fonctions standard  $F_0$  et  $\Phi$ , définies sur  $\mathbb{R}$ , intégrables sur toute demi-droite  $] -\infty, \beta]$ , telles que*

1.  $F(Y) \simeq F_0(Y)$  pour tout  $Y$  limité du domaine de  $F$ ,
2.  $|F(Y)| \leq \Phi(Y)$  pour tout  $Y$  i-grand du domaine de  $F$ .

Alors

$$\int_{Y_-}^b F(Y) dY = \int_{-\infty}^B F_0(Y) dY + \phi.$$

## 5.4 Calcul asymptotique

Dans cette section nous allons calculer une asymptotique des trois quantités  $a$ ,  $\binom{n}{a}$ , et  $I(a, p) := \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{n-a} dt$  dans trois lemmes.

### 5.4.1 Asymptotique de $a$

**Lemme 5.5**

$$a = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(A + \phi) \quad \text{avec} \quad A = -\frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}. \quad (5.6)$$

**Preuve :** Comme  $a = [J] + 1$ , avec  $S_0 \left( \frac{u_+}{u_-} \right)^J u_-^n = K$ , on a

$$J = \ln \frac{K}{S_0 u_-^n} / (\ln(u_+) - \ln(u_-))$$

$$= (l - n \ln u_-) / (\ln(u_+) - \ln(u_-))$$

avec  $l := \ln(K/S_0) = -\ln(S_0/K)$ . Or

$$\ln u_{\pm} = \ln(1 \pm \sigma \sqrt{\delta t} + \mu \delta t) = \ln(1 + \sqrt{\delta t}(\pm \sigma + \mu \sqrt{\delta t}))$$

$$= \sqrt{\delta t}(\pm \sigma + \mu \sqrt{\delta t}) + \delta t(\pm \sigma + \mu \sqrt{\delta t})^2 \left( -\frac{1}{2} + \phi \right)$$

$$= \pm \sigma \sqrt{\delta t} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \phi \right) \delta t$$

<sup>4</sup>Les symboles  $\phi$ ,  $\mathcal{L}$ , et  $@$  du calcul de Van den Berg représentent, dans un calcul, les nombres dont on sait que seul leur ordre de grandeur sera utile dans la suite du calcul. Deux occurrences distinctes de chacun de ces symboles ne représentent généralement pas le même nombre. Ainsi généralement  $\phi - \phi \neq 0$ , puisque par exemple  $\frac{3}{n} - \frac{2}{n} (= \frac{1}{n}) \neq 0$ .

<sup>5</sup>si  $N$  n'est pas entier, remplacer  $N!$  par  $\Gamma(N-1)$ .

puisque  $\mu$  et  $\sigma$  sont standard donc limités; d'où

$$\frac{1}{\ln(u_+) - \ln(u_-)} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\delta t} + \phi\delta t} = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \frac{1}{2\sigma \left(1 + \frac{\phi}{2\sigma}\sqrt{\delta t}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \frac{1}{2\sigma} (1 + \phi\sqrt{\delta t}) = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \frac{1}{2\sigma} + \phi.$$

Utilisons à présent que  $n\delta t = T = 1$ ; on a  $-n\ln(u_-) = +\sigma\sqrt{n} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \phi)$ , d'où

$$\begin{aligned} J &= (\sigma\sqrt{n} + l - \mu + \frac{\sigma^2}{2} + \phi) \left( \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \frac{1}{2\sigma} + \phi \right) \\ &= \frac{\sigma n}{2\sigma} + \sqrt{n} \left( \frac{l - \mu}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4} + \frac{\phi}{2\sigma} + \phi\sigma + \phi \left( l - \mu + \frac{\sigma^2}{2} + \phi \right) \right) \\ &= \frac{n}{2} + \sqrt{n}M, \text{ avec} \end{aligned}$$

$$M \simeq \frac{l - \mu}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4} = -\frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} =: A.$$

Donc, comme  $a = [J] + 1 = J + \alpha$ , avec  $\alpha \in ]0, 1]$ , et comme  $M = A + \phi$ ,

$$a = J + \alpha = \frac{n}{2} + \sqrt{n}M + \alpha = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(M + \phi) = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(A + \phi).$$

□

### 5.4.2 Asymptotique de $\binom{n}{a}$

**Lemme 5.6**

$$\binom{n}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-2A^2} (1 + \phi). \quad (5.7)$$

**Preuve :** Posons  $n = 2m$  et  $a = m + L = m + \sqrt{2m}M$ , c'est-à-dire  $L = \sqrt{2m}M$ , avec  $M = A + \phi$ , avec  $A$  défini dans le lemme 5.5. Par la formule de Stirling, et en remarquant que  $\frac{1+\phi}{(1+\phi)(1+\phi)} = 1 + \phi$ , on a

$$\begin{aligned} \binom{n}{a} &= \frac{(2m)^{2m} e^{-2m} \sqrt{2\pi} \sqrt{2m}}{(m+L)^{m+L} e^{-(m+L)} \sqrt{2\pi} \sqrt{m+L} (m-L)^{m-L} e^{-(m-L)} \sqrt{2\pi} \sqrt{m-L}} (1 + \phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{2m} m^{2m}}{((m+L)(m-L))^m} \left( \frac{m-L}{m+L} \right)^L \sqrt{\frac{2m}{(m+L)(m-L)}} (1 + \phi) \\ &= \frac{4^m}{\sqrt{2\pi}} \frac{m^{2m}}{m^{2m} (1 - \frac{L^2}{m^2})^m} \left( \frac{1 - \frac{L}{m}}{1 + \frac{L}{m}} \right)^L \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}}{m\sqrt{1 - \frac{L^2}{m^2}}} (1 + \phi) \end{aligned}$$

et comme  $L = \sqrt{2m}M$

$$\begin{aligned} &= \frac{4^m}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1 - \frac{2M^2}{m})^m} \left( \frac{1 - \frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{m}}}{1 + \frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{m}}} \right)^{\sqrt{m}\sqrt{2}M} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M^2}{m}}} (1 + \phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^m}{\sqrt{m}} \frac{1}{e^{-2M^2} (1 + \phi)} \left( \frac{e^{-\sqrt{2}M} (1 + \phi)}{e^{+\sqrt{2}M} (1 + \phi)} \right)^{\sqrt{2}M} \frac{1}{1 + \phi} (1 + \phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^m}{\sqrt{m}} e^{+2M^2} e^{-(2\sqrt{2}M^2)\sqrt{2}M} (1 + \phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^m}{\sqrt{m}} e^{-2M^2} (1 + \phi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-2A^2} (1 + \phi), \end{aligned}$$

puisque  $e^{-2M^2} = e^{-2(A+\phi)^2} = e^{-2A^2+\phi} = e^{-2A^2} (1 + \phi)$ .

□

### 5.4.3 Asymptotique de $I(a, p) := \int_0^p t^{a-1}(1-t)^{n-a} dt$

**Lemme 5.7** Pour  $p = \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t}(B + \phi)$  avec  $B$  standard, on a

$$I(a, p) := \int_0^p y^{a-1}(1-y)^{n-a} dy = \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}} \left( \int_{-\infty}^B 2e^{-2Y^2+4AY} dY + \phi \right). \quad (5.8)$$

**Preuve :** Posons une nouvelle fois  $n = 2m$  et  $a = m + L$ ; on a donc

$$L - 1 = \sqrt{2m}(A + \phi) - \sqrt{2m}/\sqrt{2m} = \sqrt{2m}(A + \phi).$$

A présent

$$I(a, p) := \int_0^p y^{m+L-1}(1-y)^{m-L} dy = \int_0^p (y(1-y))^m \left( \frac{y}{1-y} \right)^{L-1} \frac{dy}{1-y}.$$

La présence du terme  $(y(1-y))^m = e^{mh(y)}$ , où  $h(y) := \ln(y(1-y))$  présente un maximum au point  $y_0 = \frac{1}{2}$  nous conduit à appliquer la *méthode de Laplace*, qui consiste à faire une loupe au tour du maximum de  $h$ , et, plus précisément, à poser

$$y = y_0 + Y/\sqrt{2m}.$$

On a donc  $y = \frac{1}{2} + Y/\sqrt{2m}$ ;  $dy = dY/\sqrt{2m}$ ;  $y(1-y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{Y}{\sqrt{2m}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Y}{\sqrt{2m}}\right) = 2^{-2} \left(1 - \frac{2Y^2}{m}\right)$ ;

$$\frac{y}{1-y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{Y}{\sqrt{2m}}}{\frac{1}{2} - \frac{Y}{\sqrt{2m}}} = \frac{1 + \frac{2Y}{\sqrt{2m}}}{1 - \frac{2Y}{\sqrt{2m}}}; \quad \frac{1}{1-y} = \frac{2}{1 - \frac{2Y}{\sqrt{2m}}}.$$

Enfin  $y = 0$  si et seulement si  $Y = -\frac{\sqrt{2m}}{2} =: Y_-$  qui est i-grand négatif, et  $y = p = \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t}b$  si et seulement si  $Y = \sqrt{2m}\sqrt{\delta t}b = b$  puisque  $2m\delta t = T = 1$ . Ainsi

$$I(a, p) = \int_0^p e^{m \ln(y(1-y))} \left( \frac{y}{1-y} \right)^{\sqrt{2m}(A+\phi)} \frac{dy}{1-y} = \frac{2^{-2m+1}}{\sqrt{2m}} \int_{Y_-}^b e^{H(Y)} G(Y) dY, \quad \text{avec}$$

$$H(Y) = m \ln \left( 1 - \frac{2Y^2}{m} \right), \quad \text{et} \quad G(Y) = \left( \frac{1 + \frac{2Y}{\sqrt{2m}}}{1 - \frac{2Y}{\sqrt{2m}}} \right)^{\sqrt{2m}(A+\phi)} \frac{1}{1 - \frac{2Y}{\sqrt{2m}}}.$$

Nous observons que tant que  $Y$  est limité, on a  $\ln(1 - 2Y^2/m) = -\frac{2Y^2}{m}(1 + \phi)$ , d'où

$$H(Y) = m \left( \frac{1}{m}(-2Y^2 + \phi) \right) = -2Y^2 + \phi, \quad \text{et} \quad G(Y) = \frac{e^{2Y}(1 + \phi)}{e^{-2Y}(1 + \phi)} \frac{1}{1 + \phi} = e^{4Y}(1 + \phi),$$

et lorsque  $Y$  est i-grand et contenu dans le domaine d'intégration, donc négatif, on a  $0 < G(Y) \leq 1$  et, comme  $\ln(1 + u) \leq u$ ,  $0 \leq H(Y) \leq -2Y^2$ . Nous pouvons donc appliquer la proposition 5.4 avec  $F(Y) := e^{H(Y)}G(Y)$ ,  $F_0(Y) := e^{-2Y^2+4Y}$ , et  $\Phi(Y) = e^{-2Y^2}$  et obtenons

$$I(a, p) = \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}} \left( \int_{-\infty}^B 2e^{-2Y^2+4Y} dY + \phi \right).$$

□

## 5.5 Preuve de la formule de Black et Scholes

Pour prouver la formule de Black et Scholes, il suffit à présent d'appliquer les formules (5.6), (5.7), et (5.8) :

**Preuve :** (de la formule de Black et Scholes (5.3)) Appliquons la formule magique (5.2) à la formule de Cox-Ross-Rubinstein (5.1) ; on a, en remarquant que  $a = \frac{n}{2} + \sqrt{n}(A + \phi) = \frac{n}{2}(1 + \phi)$ ,

$$\begin{aligned}
C_0^{(n)} &= S_0 \Phi(a, n, q^*) - K e^{-rT} \Phi(a, n, p^*) \\
&= a \binom{n}{a} \left[ S_0 I \left( a, \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t} \left( \frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma} + \phi \right) \right) - K e^{-rT} I \left( a, \frac{1}{2} + \sqrt{\delta t} \left( \frac{r - \mu}{2\sigma} + \phi \right) \right) \right] \\
&= \frac{n}{2} (1 + \phi) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-2A^2} (1 + \phi) \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}} \times \text{avec } A = -\frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} \\
&\quad \times \left[ S_0 \left( \int_{-\infty}^{\frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2 + 4AY} dY + \phi \right) - K e^{-rT} \left( \int_{-\infty}^{\frac{r - \mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2 + 4AY} dY + \phi \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \phi) \left[ S_0 \left( \int_{-\infty}^{\frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2 + 4AY - 2A^2} dY + \phi \right) - K e^{-rT} \left( \int_{-\infty}^{\frac{r - \mu}{2\sigma}} 2e^{-2Y^2 + 4AY - 2A^2} dY + \phi \right) \right] \\
&= \left[ S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma} - 2A} \varphi(\xi) d\xi - K e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{r - \mu}{2\sigma} - 2A} \varphi(\xi) d\xi + \phi \right] (1 + \phi) \\
&\quad \text{avec } e^{-2Y^2 + 4AY - 2A^2} = e^{-2(Y-A)^2} = e^{-\frac{\xi^2}{2}} =: \varphi(\xi), \text{ où } \xi := 2(Y - A) \\
&\simeq S_0 \mathcal{N}(d_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_-),
\end{aligned}$$

puisque, pour  $T = 1$ ,  $\frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma} - 2A = \frac{\sigma^2 + r - \mu}{2\sigma} + 2 \frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} = d_+$ , et  $\frac{r - \mu}{2\sigma} - 2A = \frac{r - \mu}{2\sigma} + 2 \frac{\ln(S_0/K) + \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} = d_-$ .  $\square$

## 5.6 Convergence vers le prix Black-Scholes



# Chapitre 6

## Options barrières

Dans cette leçon, on va étudier l'exemple le plus simple d'option *exotique*, c'est-à-dire d'option dont la valeur n'est pas seulement fonction des valeurs atteintes par l'actif sous-jacent à l'échéance mais aussi de toutes les valeurs qu'il prend pendant la durée du contrat. De telles options s'appellent aussi des options *dépendant du chemin*. L'étude des options barrières sera aussi l'occasion de rencontrer la notion de *temps d'arrêt* et surtout le joli *principe de réflexion* d'André.

### 6.1 Définitions et exemples

Une option barrière  $(T, \varphi(S_T), H)$  est un produit dérivé sur un actif sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  pour lequel le versement de la fonction de paiement  $\varphi(S_T)$  à l'échéance  $T$  est soumis au fait que l'actif sous-jacent ait franchi ou non, durant la durée de vie du contrat, vers le haut ou vers le bas, une barrière  $H$  donnée. Il existe une grande variété d'option barrière; on peut ranger les plus courantes en deux catégories :

- **les knock-out** : l'option expire automatiquement lorsque le sous-jacent touche la barrière.
- **les knock-in** : l'option n'est activée que si le sous-jacent touche la barrière.

Par ailleurs, ces options s'appellent put, call, options binaires, etc., ..., selon que  $\varphi(S) = (K - S)^+$ ,  $\varphi(S) = (S - K)^+$ ,  $\varphi(S) = \mathbb{1}_{S > K}$ , etc., ... Voici quelques exemples :

- Un *down and out call* (DOC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $H$  est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci n'est jamais descendu en dessous de  $H$  pendant la durée de vie du contrat.
- Un *down and in put* (DIP) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $H$  est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  seulement si celui-ci est descendu en dessous de  $H$  pendant la durée de vie du contrat.
- Un *up and out put* (UOP) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $H$  est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci n'a jamais dépassé le niveau  $H$  pendant la durée de vie du contrat.

Il existe de même des options DIC, UIC, UIP, DOP et UOC, mais aussi des options avec doubles barrières et bien d'autres. Souvent le contrat prévoit une *rebate*, somme payée en cash, dans le cas où l'option est out.

Le principal intérêt des options barrières est qu'elles sont moins chères que les options ordinaires correspondantes, environs quatre fois moins chères, car elles laisse à l'acheteur, et d'ailleurs aussi au vendeur, un risque résiduel. Par exemple pour une option DIC, la couverture qu'un call offre par rapport à une envolée du cours du sous-jacent est tout simplement perdue dans le cas où celui-ci n'a pas franchi la barrière. Mais ce risque est jugé suffisamment improbable par celui qui accepte de le prendre ou bien il considère que ses conséquences sont acceptables au regard de l'économie qu'il procure. Pour le vendeur, l'un des intérêt est que, comme les options barrières se négocient uniquement de gré à gré (et non sur les marchés organisés comme c'est le cas pour les put et les call ordinaires), il peut prendre en général des marges plus élevées car le marché des produits OTC (over the counter) est moins tendu.

A titre d'exemple, considérons une entreprise qui va recevoir dans 6 mois en Euros des revenus perçus en Yen et qui craint qu'une dépréciation du Yen par rapport à l'Euro dans les mois à venir vienne mettre en péril le niveau de ces revenus. Elle peut acheter un put à 6 mois qui lui donnera le droit de vendre des Yens en Euros à un prix fixé, par exemple égal ou légèrement inférieur au cours actuel. Mais si l'entreprise achète une option DIP, avec une barrière  $H$  peu inférieure au prix d'exercice  $K$ , cela lui en coûtera bien moins chère et cela lui assurera la même couverture contre une dépréciation du Yen, sauf dans le cas où à aucun moment donné durant ces 6 mois, le cours ne descend en dessous de  $H$ . Mais ce cas correspond

à une situation où la dépréciation redoutée est restée très limitée et le risque résiduel peut donc être jugé sans gravité.

Ce sont des situations de ce type qui conduisent au développement du marché des options barrières; celles-ci constituent plus de 10% de l'activité sur le marché des changes par exemple.

## 6.2 Mesurabilité et temps d'arrêt

Rappelons que si  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé,  $\mathcal{T}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ , on dit qu'une v.a.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est *mesurable* par rapport à  $\mathcal{T}$ , ou qu'elle est  $\mathcal{T}$ -mesurable, si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{X \leq x\} \in \mathcal{T}$ . Il est clair que si  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ , une v.a.  $\mathcal{T}$ -mesurable est nécessairement constante et si  $A$  étant une partie de  $\Omega$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ , une v.a.  $\mathcal{T}$ -mesurable aura au plus deux valeurs. Plus généralement, on a la proposition suivante :

**Proposition 6.1** *Lorsque  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé fini et  $\mathcal{T}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ , une v.a. est  $\mathcal{T}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de la tribu  $\mathcal{T}$ .*

Il est aussi utile de connaître la notion de *tribu engendrée par une v.a.* dont nous rappelons la définition :

**Définition :** Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une v.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , on appelle *tribu engendrée* par  $X$ , notée  $\sigma(X)$ , la plus petite sous tribu de  $\mathcal{F}$  par rapport à laquelle  $X$  est mesurable. Plus généralement si  $X_1, X_2, \dots, X_m$  est une suite de v.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , la tribu engendrée par cette suite de v.a., notée  $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_m)$  est la plus petite sous tribu de  $\mathcal{F}$  par rapport à laquelle toutes les v.a.  $X_i, i = 1, \dots, m$ , sont mesurables.

**Exemple :** On a vu qu'on peut associer à toute marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  telle que, pour un  $t \in \mathbb{T}$  donné, les atomes de  $\mathcal{F}_t$  sont formés des états du monde  $\omega \in \Omega$  dont les trajectoires  $X(\omega)$  coïncident jusqu'à l'instant  $t$ . On se convainc facilement que les v.a.  $X_t$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurables et aussi  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour tout  $s \geq t$  mais  $X_t$  n'est généralement pas  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour  $s < t$ . Intuitivement la propriété d'être  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour une v.a. sur  $\Omega$  signifie simplement,  $\mathcal{F}_t$  représentant l'information dont on dispose à l'instant  $t$ , que cette v.a. ne dépend que de l'information dont on dispose à cet instant ou plus simplement qu'elle est *connue* à l'instant  $t$ , mais qu'elle ne peut pas prévoir l'avenir, c'est-à-dire distinguer (en leur donnant des valeurs différentes) deux trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$  mais ne coïncideraient plus au delà.

En particulier il est facile de voir que si  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est la filtration associée à une m.a.  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de Cox-Ross-Rubinstein,  $S_T$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable de même que toute v.a. de la forme  $\varphi(S_T)$  où  $\varphi$  est une fonction (déterministe) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque :** Il y a un point un peu subtil qu'il est important de noter ici : pour une marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , les deux tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma(X_t)$  ne sont pas égales. La première représente l'information dont on dispose jusqu'à l'instant  $t$  et la seconde l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . On a en réalité on a  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_{\delta t}, \dots, X_{t-\delta t}, X_t)$  et donc  $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$  mais cette inclusion est stricte. Une v.a. qui est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, donne donc nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide jusqu'à l'instant  $t$  et donc, en particulier la même valeur pour deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$ , alors qu'une v.a.  $\sigma(X_t)$ -mesurable donne la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$ , mais pas nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$  mais pas à un instant antérieur.

La notion de *temps d'arrêt* formalise l'idée d'un instant où quelque chose se produit, par exemple le passage d'une barrière, sans que cela ait lieu nécessairement au même instant sur toutes les trajectoires : en ce sens c'est une temps *aléatoire* puisque sa valeur dépend de l'état du monde.

**Définition :** Si  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration, une v.a.  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T}$  est un *temps d'arrêt* si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

On peut vérifier que la condition "pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ " est équivalente à la précédente. L'exemple suivant est l'un des exemples de temps d'arrêt les plus utilisés :

**Exemple :** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  sa filtration associée et  $A \subseteq \mathbb{R}$  un sous ensemble quelconque. La v.a. suivante qui représente *le premier instant d'entrée d'une trajectoire dans le sous ensemble  $A$*  est un temps d'arrêt :

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \text{Min} \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Par contre on voit facilement que la v.a. suivante n'est pas un temps d'arrêt :

$$\theta(\omega) := \begin{cases} \text{Max} \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

La caractérisation suivante des temps d'arrêt est souvent très utile :

**Proposition 6.2** *Si  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une m.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  la filtration associée, une v.a.  $\tau$  est un temps d'arrêt si et seulement si*

$$[\tau(\omega) = t \text{ et } \omega' \stackrel{t}{\sim} \omega] \Rightarrow \tau(\omega') = t$$

En utilisant cette caractérisation, on montre par exemple que si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux temps d'arrêt alors  $\tau \wedge \tau' := \text{Min}(\tau, \tau')$  est encore un temps d'arrêt, de même que  $\tau + c$ , où  $c$  est une constante.

### 6.3 Calcul du prix d'une option DIC

Pour calculer le prix d'une DIC, nous allons supposer comme précédemment que l'actif sous-jacent suit un modèle CRR mais nous choisissons cette fois un taux d'escompte  $r = 0$  pour simplifier. Les valeurs prises par  $S_t$  lorsque  $t = n\delta t$  sont donc  $\{S_0 u^j d^{n-j}, j = 0, \dots, n\}$  et elles peuvent être représentées sur un arbre comme sur la figure suivantes :

Pour le calcul du prix d'une option DIC, on va faire une hypothèse supplémentaire sur le modèle du sous-jacent : on va supposer que  $d = 1/u$ . Cette hypothèse garantit que les noeuds de l'arbre sont alignés horizontalement, chaque ligne étant repérée par un entier  $j$ , de telle sorte que la barrière passe exactement entre deux lignes de noeuds et puisse ainsi être repérée par une valeur de  $j$ , par exemple le numéro  $j$  de la ligne immédiatement inférieure. Si l'on désigne par  $h$  cet entier, on a :

$$h = \left[ \frac{\ln \frac{H}{S_0} - n \ln d}{\ln u - \ln d} \right] \quad (6.1)$$

où  $[z]$  désigne la partie entière de  $z$ , c'est-à-dire l'entier strictement inférieur au nombre  $z$ . En effet, si  $H$  était situé exactement sur une ligne de noeuds, on aurait  $S_0 u^h d^{n-h} = H$ , soit  $u^h d^{n-h} = \frac{H}{S_0}$ , soit encore en prenant le logarithme des deux membres,  $h \ln u + (n - h) \ln d = \ln \frac{H}{S_0}$ . D'où l'expression (6.1).

**Définition :** Soit  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a. CRR sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  pour laquelle  $ud = 1$  et soit  $H > 0$ . La v.a. suivante est un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  associée :

$$\tau_H(\omega) := \begin{cases} \text{Min} \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq H\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq H\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $S_t(\omega)$  est la trajectoire correspondant à l'état du monde  $\omega$ ,  $\tau_H(\omega)$  désigne donc le premier instant qui suit le franchissement de la barrière  $H$  si cet instant précède  $T$  et il vaut  $T$  si la trajectoire ne franchit pas la barrière avant  $T$ . On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un temps d'arrêt en utilisant la caractérisation donnée par la proposition 6.2.

Ce temps d'arrêt permet d'exprimer par une formule la valeur à l'échéance ou paye off d'une option DIC :

**Définition :** Une down and in call (DIC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $H$  souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR  $(S_t)$  a pour valeur à l'échéance :

$$\psi_T = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H < T}$$

où  $\mathbb{I}_{\tau_H < T}$  est la v.a. sur  $\Omega$  qui vaut 1 si  $\tau_H < T$  et 0 sinon.

On a vu lors des leçons précédentes comment calculer le prix d'une option  $(T, \varphi(S_T))$  sur un sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de type CRR : c'est la formule fondamentale (proposition 4.3). Dans ce cas le paye off  $\varphi(S_T)$  est une v.a.  $S_T$ -mesurable c'est-à-dire que  $\varphi(S_T)$  est connu dès qu'on connaît la valeur atteinte par  $(S_t)$  en  $t = T$ . Dans le cas d'une option barrière, la valeur atteinte par  $(S_t)$  en  $t = T$  ne suffit pas pour calculer le paye off, il faut en plus connaître la trajectoire suivie par  $S_t$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  puisqu'il faut savoir si celle-ci a franchi la barrière ou non. Cela signifie que la valeur de l'option à l'échéance n'est plus  $\sigma(S_T)$ -mesurable mais bien  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. D'où la nécessité de généraliser la formule fondamentale :

**Proposition 6.3** Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, en supposant le taux d'escompte nul, le prix à l'instant  $t = 0$  d'une option  $(T, \psi_T)$ , où  $\psi_T$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, est donnée par  $\psi_0 = \mathbb{E}(\psi_T) = \mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H < T})$ , c'est-à-dire qu'il est égal à l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement.

La preuve de cette proposition consiste simplement à reprendre celle de la proposition 4.3 et vérifier que seule la  $\mathcal{F}_T$ -mesurabilité du paye off et non la  $\sigma(S_T)$ -mesurabilité a été utilisée.

Il reste cependant à calculer l'espérance  $\mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H < T})$ . C'est pour faire ce calcul qu'on utilise le principe de symétrie d'André :

**Proposition 6.4** Le nombre de trajectoires de la marche aléatoire binaire  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  telles que  $S_{n\delta t} = S_0 u^{2j-n}$  en ayant franchi la barrière  $H = S_0 u^h d^{n-h}$  (on suppose  $h \leq \frac{n}{2}$ ) est égal à  $\binom{n}{j}$  si  $0 \leq j < h$ , à  $\binom{n}{j+n-2h}$  si  $h \leq j \leq 2h$  et à 0 si  $j > 2h$ .

Ceci va nous permettre de calculer le prix initial d'une option DIC :

**Proposition 6.5** Une down and in call (DIC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $H$  souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR  $(S_t)$  a pour valeur à l'échéance :

- Si  $H \leq K$  :

$$\sum_{j=k}^{2h} \binom{n}{j+n-2h} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K)$$

- Si  $K \leq H$  :

$$\sum_{j=k}^h \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) + \sum_{j=h+1}^{2h} \binom{n}{j+n-2h} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K)$$

# Chapitre 7

## Martingales

Intuitivement, une martingale est une marche aléatoire n'ayant ni tendance haussière ni tendance baissière, sa valeur à chaque instant étant égale à l'espérance de ses valeurs futures. On utilise des marches aléatoires ayant cette propriété pour modéliser le prix des actifs financiers car un prix de marché est un nombre sur lequel deux parties, celle qui achète et celle qui vend, tombent d'accord; si le prix avait une tendance à la hausse, le vendeur n'aurait pas accepté la transaction et inversement s'il avait une tendance à la baisse c'est l'acheteur qui l'aurait refusé. Donc il est naturel de supposer qu'un *fair-price* a la propriété de martingale. Cela n'entraîne nullement que le prix ne varie pas car, selon l'état du monde qui se réalise, il augmente effectivement ou bien diminue. Mais lorsque l'on prend en compte l'ensemble des états du monde possibles, il est raisonnable de supposer que sa variation espérée est nulle. Bien sûr, les véritables variations du prix qui interviendront dans la réalité, et qui dépendent de l'état du monde, seront certainement non nulles. D'ailleurs, c'est parce que les deux parties n'ont pas les mêmes anticipations sur l'état du monde qui va se réaliser que la transaction a lieu.

La notion de martingale joue aujourd'hui un rôle central en finance mathématique<sup>1</sup>; elle était déjà présente dans la thèse de Louis Bachelier en 1900 mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P. Levy et J.L. Doob, et plus tard par l'école de probabilités de Strasbourg, notamment P.A. Meyer.

### 7.1 Définition et exemples

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé fini et soit  $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration de  $\Omega$ .

**Définition :** On dit qu'une m.a.  $M := (M_t)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale (mtg) si et seulement si

$$\text{pour tous } s \leq t, M_s = \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s). \quad (7.1)$$

Observons qu'il résulte de la définition de l'espérance conditionnelle, qu'une  $\mathcal{F}$ -martingale est nécessairement une marche aléatoire  $\mathcal{F}$ -adaptée, c'est-à-dire que, pour tout  $t$ , la v.a.  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

La proposition suivante donne trois autres caractérisations de la propriété de martingale, souvent utiles, qui découlent également des propriétés de l'espérance conditionnelle. On utilise, comme précédemment, la notation  $\mathbb{E}_s X := \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_s)$ .

**Proposition 7.1** *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1.  $M$  est une martingale.
2. Pour tout  $s \in \mathbb{T}$ ,  $M_s = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t})$ .
3. Pour tout  $s \in \mathbb{T}$ ,  $\mathbb{E}_s(\delta M_{s+\delta t}) = 0$ , où  $\delta M_{s+\delta t} := M_{s+\delta t} - M_s$ .
4. Pour tout  $s \leq t$  dans  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = 0$ .

---

<sup>1</sup>Voir le livre de Nicolas Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, 1998

**Preuve :** On fait une démonstration "circulaire" : la propriété 1 entraîne évidemment 2 et si la propriété 2 est vraie, on a :

$$\mathbb{E}_s(M_{s+\delta t} - M_s) = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t}) - M_s = M_s - M_s = 0.$$

D'où la propriété 3. Si celle-ci est vraie, alors

$$\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = \mathbb{E}_s\left(\sum_{\tau=s}^{t-\delta t} (M_{\tau+\delta t} - M_\tau)\right) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t} \mathbb{E}(\delta M_{\tau+\delta t}) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t} \mathbb{E}_s(\mathbb{E}_\tau(\delta M_{\tau+\delta t})) = 0.$$

D'où la propriété 4. On vérifie enfin que la propriété 4 implique à son tour la propriété 1 car  $M_s - \mathbb{E}_s(M_t) = \mathbb{E}_s(M_s - M_t) = 0$ .  $\square$

**Exemples :**

1. Le premier exemple est celui de la  $p$ -marche de Wiener  $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$  pour laquelle on a par définition :

$$\mathbb{E}(\delta W_t) = p\sqrt{\delta t} + (1-p)(-\sqrt{\delta t}) = (2p-1)\sqrt{\delta t}.$$

Donc c'est une martingale (par rapport à la filtration qui lui est associée) si et seulement si  $p = \frac{1}{2}$ .

2. Le second exemple est celui de la marche aléatoire de Cox, Ross et Rubinstein  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  qui modélise le prix d'un actif financier à l'instant  $t$ . Si l'on veut trouver une probabilité  $p = P(S_{t+\delta t}/S_t = u)$  telle que sa valeur actualisée soit une martingale : plus précisément, on aura, si  $r$  désigne le taux d'escompte monétaire, supposé constant, et  $\tilde{S}_t$  le prix actualisé,

$$\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t,$$

on aura les relations suivantes que doit satisfaire  $p$  :

$$\mathbb{E}_t(\tilde{S}_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)} \mathbb{E}(S_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)} (pS_t u + (1-p)S_t d) = e^{-r\delta t} (pu + (1-p)d)\tilde{S}_t.$$

Donc  $\tilde{S}_t$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale ssi  $pu + (1-p)d = e^{r\delta t}$ . On retrouve la probabilité de calcul introduite pour évaluer le prix d'options :

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

Dans le modèle CRR, la probabilité de calcul est donc l'unique probabilité pour laquelle la valeur actualisée de l'actif sous-jacent est une martingale.

3. Le troisième exemple est celui d'une martingale fermée par une v.a. : si  $X$  est une v.a. sur un espace probabilisé muni d'une filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , la marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  définie par  $X_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$  est, par construction, une martingale. De façon générale, on dit qu'une  $\mathcal{F}$ -martingale  $M_t$  est une martingale *fermée par la v.a.  $X$*  si elle s'écrit  $M_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$  pour une certaine v.a.  $X$ . C'est une façon naturelle de construire une martingale et c'est ce que nous avons fait à travers la formule fondamentale pour la marche  $\tilde{C}_t$ . Nous avons vu en effet que

$$C_t = e^{r(T-t)} \mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$$

ce qui s'écrit encore  $e^{rt} C_t = \mathbb{E}(e^{rT} \varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$ . Ainsi la formule fondamentale indique qu'à tout instant  $t$ , le prix actualisé  $\tilde{C}_t$  d'une option européenne  $(T, \varphi(S_T))$  est la martingale fermée par la v.a.  $\varphi(\tilde{S}_T)$ .

## 7.2 Quelques propriétés

La propriété la plus importante des martingales est qu'elles ont un espérance constante :

**Proposition 7.2** *Si  $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une martingale, alors  $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$  est constant et pour tout  $t \in \mathbb{T}$  on a  $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ . En particulier si  $M_0$  est une v.a. constante, égale au nombre  $M_0$ , on a pour tout  $t$ ,  $\mathbb{E}(M_t) = M_0$ .*

De cette proposition appliquée à la martingale  $(\tilde{C}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , on déduit immédiatement que la valeur de la prime  $C_0$  est l'espérance du paye off  $\tilde{C}_T = \varphi(\tilde{S}_T)$ .

**Définition :** On dit qu’une m.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une  $\mathcal{F}$ -sous<sup>2</sup>-martingale (ss-mtg) si et seulement si  $X$  est  $\mathcal{F}$ -adaptée et

$$\text{pour tous } s \leq t, X_s \leq \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s). \quad (7.2)$$

On définit de façon analogue les  $\mathcal{F}$ -surmartingales. Evidemment une m.a. qui est à la fois une sur- et une sousmartingale est une martingale.

**Théorème 7.3** Toute sousmartingale  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  admet une décomposition en

$$X_t = M_t + A_t$$

où  $M_t$  est une martingale telle que  $M_0 = X_0$  et  $A_t$  une m.a. croissante (pour tout  $t$ ,  $A_t \leq A_{t+\delta t}$ ) et prévisible, c’est-à-dire telle que  $A_{t+\delta t}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Cette décomposition est appelée décomposition de Doob-Meyer.

**Preuve :** Dans le cas où l’espace probabilisé  $\Omega$  est fini (ce qui est le contexte choisi pour ce cours), ce théorème est facile à montrer : il suffit de poser  $\delta M_{t+\delta t} := X_{t+\delta t} - \mathbb{E}_t(X_{t+\delta t})$  avec  $M_0 = X_0$  et  $\delta A_{t+\delta t} := \mathbb{E}_t(X_{t+\delta t}) - X_t$  avec  $A_0 = 0$  et de vérifier que  $M_t$  et  $A_t$  ont bien les propriétés requises.  $\square$

### 7.3 Calcul des “pertes et profits” d’un portefeuille

On a rencontré au paragraphe précédent la notion de processus prévisible dont nous dégageons à présent la définition :

**Définition :** Une marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dite prévisible par rapport à une filtration  $\mathcal{F}$  *ssi*, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable.

Si l’on se souvient qu’une v.a. est  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable lorsqu’elle est connue dès qu’on connaît l’information dont on dispose à l’instant  $t - \delta t$ , information représentée par la tribu  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ , on comprend pourquoi cette propriété s’appelle la prévisibilité. L’exemple typique de m.a. prévisible que nous considérerons est la m.a.  $\alpha_t$  qui représente la composition en actif sous-jacent d’un portefeuille de couverture d’une option. En effet on supposera cette composition choisie à l’instant  $t - \delta t$  au vu du prix atteint par l’actif sous-jacent à cet instant et maintenue inchangée jusqu’à l’instant  $t$ , date à laquelle le détenteur du portefeuille réajuste sa position au vu de la nouvelle valeur atteinte par l’actif sous-jacent à cette date.

Nous allons voir à présent que généralement, le fait que les actifs risqués qui composent un portefeuille soient des martingales, entraîne qu’il en est de même de la valeur du portefeuille. Ceci fournit une nouvelle preuve du fait que la valeur actualisée de l’option (qui par définition est le prix d’un portefeuille de couverture) soit une martingale.

Ce résultat important est en fait valable non seulement lorsqu’on ne dispose que de deux actifs, l’un risqué et l’autre non risqué, mais plus généralement lorsque l’on dispose de  $d + 1$  actifs, d’où la généralisation proposée maintenant.

**Définition :** Un *marché financier* est la donnée de  $(d + 1)$  marches aléatoires  $(S_t^1, \dots, S_t^d; B_t)$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  muni d’une filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , telles que :

- $(B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est déterministe (par exemple  $B_t = e^{rt}$ ) : elle modélise un actif non risqué.
- $(S_t^1)_{t \in \mathbb{T}}, \dots, (S_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$  sont  $\mathcal{F}$ -adaptées : elles modélisent  $d$  actifs risqués.

Dans un tel marché financier, on appelle *portefeuille*  $\Pi = (\Pi_t)_{t \in \mathbb{T}}$  (ou *stratégie de portefeuille*) une famille de  $d + 1$  m.a. prévisibles  $\Pi_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^d; \beta_t) = (\alpha_t; \beta_t)$  et *valeur* du portefeuille (ou de la stratégie)  $\Pi$  la quantité

$$V_t^\pi = \alpha_t^1 S_t^1 + \dots + \alpha_t^d S_t^d + \beta_t B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t$$

Il est utile d’introduire, à coté des prix des actifs ou des portefeuilles leurs *prix actualisés*, de façon à pouvoir comparer leurs valeurs à des instants  $t$  différents. On désigne par  $\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$  et  $\tilde{V}_t^\pi := \frac{V_t^\pi}{B_t}$  ces valeurs actualisées. On a alors

$$\tilde{V}_t^\pi = \alpha_t \cdot \tilde{S}_t + \beta_t.$$

Remplacer dans les calculs les prix des actifs  $S_t^i$  par leurs valeurs actualisées  $\tilde{S}_t^i$  correspond à ce que l’on appelle parfois “travailler en Francs constants” c’est-à-dire choisir comme numéraire le prix de l’actif

<sup>2</sup>retenir que toute valeur  $X_s$  de la marche est “sous” ( $\leq$ ) l’espérance (conditionnelle) de toute valeur future ( $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$ ).

non risqué  $B_t$  et donc exprimer les autres prix en fonction de celui-ci. On supposera aussi désormais que  $B_0 = 1$ .

Une propriété importante des portefeuilles que nous considérons, que possèdent notamment les portefeuilles destinés à couvrir une option, est d'être autofinancés, c'est-à-dire que, lors de la recombinaison à chaque instant  $t \in \mathbb{T}$ , les modifications se font sans apport ni retrait de fonds. Cette propriété s'exprime par l'identité suivante :

**Définition :** Un portefeuille  $\Pi_t = (\alpha_t ; \beta_t)$  est dit *autofinancé ssi* pour tout  $t = \delta t, \dots, T$ , on a :

$$\alpha_{t-\delta t} \cdot S_t + \beta_{t-\delta t} B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t.$$

Une autre façon d'évaluer la valeur d'un portefeuille autofinancé est d'étudier ses "pertes et profits", c'est-à-dire la somme accumulée des gains et pertes réalisés, en raison des variations de la valeur des actifs qui le composent.

**Définition :** On appelle *pertes et profits*, noté  $P\&P_t$ , d'un portefeuille  $\Pi_t = (\alpha_t ; \beta_t)$  la quantité

$$P\&P_t := \sum_{s=\delta t}^t \alpha_s (\delta \tilde{S}_s).$$

**Proposition 7.4** *Pour un portefeuille autofinancé, on a la propriété suivante :*

$$\tilde{V}_t^\pi = V_0^\pi + P\&P_t$$

**Preuve :** En effet on a :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^\pi &= \frac{V_t^\pi}{B_t} = \sum_{s=\delta t}^t \frac{1}{B_s} (V_s^\pi - V_{s-\delta t}^\pi) \\ &= \frac{V_0^\pi}{B_0} + \sum_{s=\delta t}^t \frac{1}{B_s} (\alpha_s \cdot S_s + \beta_s B_s - \alpha_{s-\delta t} \cdot S_{s-\delta t} + \beta_{s-\delta t} B_{s-\delta t}) \\ &= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^t (\alpha_{s-\delta t} \cdot \delta \tilde{S}_s) + \sum_{s=\delta t}^t (\beta_{s-\delta t} \delta \tilde{B}_s) = V_0^\pi + P\&P_t \end{aligned}$$

car la dernière somme est nulle (en *francs constants*, le numéraire ne varie pas dans le temps).  $\square$

Si l'on suppose que  $\tilde{S}_t$  est une martingale, la somme  $\sum_{s=\delta t}^t \alpha_s (\delta \tilde{S}_s)$  s'appelle la *transformée de la martingale*  $\tilde{S}_t$  par la marche aléatoire prévisible  $\alpha_t$ . Cette somme est une version discrète de l'intégrale stochastique de la marche  $\alpha_t$  contre les variations de la martingale  $\tilde{S}_t$ . La proposition suivante montre que cette somme est elle-même une martingale :

**Proposition 7.5** *Soit  $(H_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a.  $\mathcal{F}$ -prévisible et soit  $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une  $\mathcal{F}$ -martingale. Alors la m.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  définie de la façon suivante est une martingale :*

$$\begin{cases} X_0 &= H_0 M_0 \\ \delta X_t &= H_t \delta M_t \end{cases} \quad (7.3)$$

**Preuve :** On a les égalités  $\mathbb{E}_t(X_{t+\delta t} - X_t) = \mathbb{E}_t(H_{t+\delta t} \delta M_{t+\delta t}) = H_{t+\delta t} \mathbb{E}_t(\delta M_{t+\delta t}) = 0$ .  $\square$

En appliquant cette proposition au prix d'un portefeuille de couverture autofinancé, qui est égal à sa valeur initiale plus ses pertes et profits, on déduit que  $\tilde{V}_t^\pi$  est une martingale et donc que  $V_0^\pi = \mathbb{E}(\tilde{V}_T^\pi)$ .

## 7.4 Le cas des marchés incomplets

On a vu que lorsqu'on modélise les actifs financiers par des m.a. CRR avec la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage  $d < R < u$ , on peut construire, pour toute option européenne  $(T, \varphi(S_T))$ , un portefeuille autofinancé qui couvre l'option. On dit aussi de ce portefeuille qu'il *duplique* l'option puisque son prix est, à chaque instant, égal à celui de l'option, ou bien que celle-ci est *duplicable*.

**Définition :** Si  $\Phi$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, on dit que  $\Phi$  est *duplicable* s'il existe un portefeuille autofinçant tel que  $V_T^\pi = \Phi$ .

Si l'on choisit d'autres modèles que des modèles CRR pour décrire les actifs présents sur le marché, rien n'indique, à priori, que n'importe quelle option  $\Phi$  souscrite sur un de ces actifs, sera duplicable. Un marché où toute option est duplicable s'appelle un *marché complet*. Sinon, on parle de marché *incomplet*.

Une question naturelle se pose : comment calculer le prix d'une option (non nécessairement duplicable) dans un marché incomplet ? Nous allons voir que, sous certaines hypothèses (marché viable), on peut encore proposer un prix mais il n'est pas unique, c'est en réalité un intervalle de prix possibles que l'on obtient alors.

**Définition :** Etant donnée une option  $\Phi$  souscrite sur un actif  $S_t$ , on appelle *portefeuille de surcouverture* (respectivement *de souscouverture*) tout portefeuille autofinçant  $\Pi_t$  tel que  $V_T \geq \Phi$  (respectivement tel que  $V_T \leq \Phi$ ) et on désigne par  $\mathcal{P}^*(x, \Phi)$  (respectivement  $\mathcal{P}_*(x, \Phi)$ ) l'ensemble des portefeuilles de surcouverture (respectivement de souscouverture) pour  $\Phi$  de valeur initiale  $V_0^\pi = x$ .

Enfin on désigne par  $C^*$  et  $C_*$  les quantités

$$C^*(\Phi) := \begin{cases} \text{Inf} \{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}^*(x, \Phi)\} & \text{si } \{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}^*(x, \Phi)\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C_*(\Phi) := \begin{cases} \text{Inf} \{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}_*(x, \Phi)\} & \text{si } \{x \geq 0, \exists \pi \in \mathcal{P}_*(x, \Phi)\} \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition :** Un marché est *viable* s'il existe une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que tous les actifs risqués actualisés  $(S_t^1/B_t)_{t \in \mathbb{T}}, \dots, (S_t^d/B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  soient des martingales pour  $P$ .

**Remarque :** Le fait que pour le modèle CRR il existe une unique probabilité pour laquelle l'actif  $S_t$  soit une martingale (appelée probabilité de calcul) ne doit pas donner à penser qu'en général une telle probabilité est unique. Ainsi dans son livre<sup>3</sup>, Pliska donne l'exemple suivant d'un modèle incomplet à une étape : à l'instant initial, l'actif vaut  $S_0 = 5$  et, à l'instant final,  $\tilde{S}_\delta = \tilde{S}_T$  peut prendre l'une des trois valeurs 6, 4, ou 3. Si l'on désigne par  $p_1, p_2$  et  $p_3$  les probabilités respectives de ces trois éventualités. On suppose  $p_i > 0$  pour tout  $i = 1, 2, 3$  et on a bien sûr  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . De plus l'actif est une martingale ssi  $5 = 6p_1 + 4p_2 + 3p_3$ . Ces conditions sont équivalentes à

$$\begin{cases} p_2 & = & 2 - 3p_1 \\ p_3 & = & -1 + 2p_1 \end{cases} \quad (7.4)$$

avec  $\frac{1}{2} < p_1 < \frac{2}{3}$ . Donc l'ensemble des probabilités de martingale pour  $(\tilde{S}_t)$  est le segment  $\{(p_1, p_2, p_3) = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda), \lambda \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]\}$ .

**Théorème 7.6** *Dans un marché financier viable, on a nécessairement pour toute option  $\Phi$  souscrite sur un actif du marché, l'inégalité  $C_*(\Phi) \leq C^*(\Phi)$ , avec égalité  $C_*(\Phi) = C^*(\Phi)$  si et seulement si l'option est duplicable. Tout prix  $C < C_*(\Phi)$  est un prix d'arbitrage pour le vendeur et tout prix  $C > C^*(\Phi)$  est un prix d'arbitrage pour l'acheteur ; l'intervalle  $[C_*(\Phi), C^*(\Phi)]$  fournit donc l'ensemble des prix acceptables pour les deux parties. De plus, si  $P$  est une probabilité pour laquelle la valeur actualisée de l'actif sous-jacent à  $\Phi$ ,  $(\tilde{S}_t)$ , est une martingale, alors on a  $\mathbb{E}^P(\tilde{\Phi}) \in [C_*(\Phi), C^*(\Phi)]$ .*

<sup>3</sup>S. R. Pliska *Introduction to mathematical finance, Discrete time models*, Blackwell, 1997.



# Chapitre 8

## Options américaines

Alors qu'une option européenne ne donne à son détenteur le droit d'exercer (et d'obtenir le pay-off) qu'à un instant fixé  $T$ , l'option américaine correspondante lui donne ce droit à tout instant  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T = n\delta t\}$  compris entre 0 et  $T$ . Par exemple un call européen sur l'actif  $S_t$  rapportera  $(S_T - K)^+$  à la date  $T$  et le call américain sur le même actif sous-jacent rapportera, s'il est exercé à la date  $t$ , le pay-off  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ . Nous allons dans cette leçon apprendre à calculer le prix d'une option américaine et au passage nous découvrirons quelques beaux outils du calcul stochastique comme le théorème d'arrêt optimal ou la décomposition de Doob-Meyer des surmartingales.

### 8.1 Calcul du prix par récurrence retrograde

Comme précédemment, le processus  $(S_t)$ , défini pour tout  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T = N\delta t\}$ , représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps, et on le suppose adapté par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  qui représente l'information disponible à l'instant  $t$ . Désignons par  $U_t$  la valeur à l'instant  $t$  d'une option américaine dont le pay-off est noté  $\varphi(S_t)$  (s'il exerce son option à l'instant  $t$ , le détenteur de l'option reçoit  $\varphi(S_t)$ ). Comment évaluer son prix? On le détermine de proche en proche à partir de la valeur finale la valeur minimale d'un portefeuille de couverture. Tout d'abord, si l'option n'a pas été exercée avant la date finale  $T$ , elle vaudra en  $t = T$  le pay-off  $\varphi(S_T)$ . A l'instant précédent  $t = T - \delta t$ , le vendeur devra pour se couvrir disposer d'une richesse au moins égale au pay-off  $\varphi(S_{T-\delta t})$ , pour le cas où le détenteur de l'option l'exercerait à cette date, et en même temps au moins égale à  $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})$  qui est le prix d'un portefeuille de couverture lui permettant de faire face à ses obligations à la date  $T$  si le détenteur ne vient pas exercer avant  $T$ . On peut donc écrire pour le prix de l'option américaine en  $T - \delta t$  :

$$U_{T-\delta t} = \text{Max} \{ \varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t}) \} = \text{Max} \{ \varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_T/\mathcal{F}_{T-\delta t}) \}$$

Mais on peut reproduire ce raisonnement pour l'instant  $t = T - 2\delta t$ , et ainsi de suite. On obtient ainsi la relation de récurrence retrograde suivante :

$$\begin{cases} U_t &= \text{Max} (\varphi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)) \\ U_T &= P_T \end{cases} \quad (8.1)$$

Dans le cas d'une option européenne, par exemple un Call, on déduit facilement de la relation de récurrence  $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$  la formule fondamentale  $C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(C_T/\mathcal{F}_t)$  indiquant que la valeur de l'option à l'instant  $t$  est l'espérance actualisée de son pay-off. Dans le cas d'une option américaine, on ne déduit pas facilement de cette relation (A.4) la valeur de  $U_t$  directement comme une fonction de  $t$  et du pay-off mais nous verrons qu'il existe néanmoins une formule fermée de ce type, quoique moins explicite. Par contre, il est facile de programmer cette récurrence pour calculer la prime  $U_t$  à tout instant  $t$ .

On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correspondante puisqu'elle donne plus de droits. La différence entre les deux s'appelle la *prime d'exercice anticipé* (*early exercise premium*). Dans quels cas a-t-on intérêt à exercer de façon anticipée c'est-à-dire dans quels cas cette prime est-elle strictement positive? Nous allons voir que ce n'est jamais le cas pour un Call, sauf si l'actif sous-jacent distribue des dividendes et que par contre c'est généralement le cas pour un Put, à moins de pouvoir supposer nul le taux d'intérêt  $r$  (ce qui ne serait pas très réaliste).

**Proposition 8.1** *En supposant que l'actif sous-jacent  $S_t$  ne distribue pas de dividende, le prix d'un Call américain sur  $S_t$  est égal au prix du Call européen de même date et prix d'exercice.*

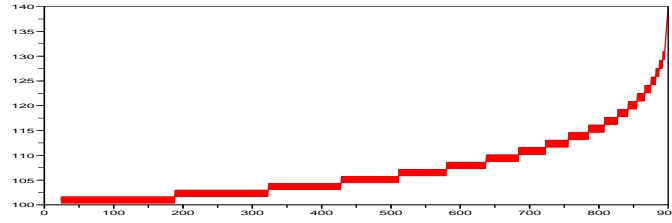


FIG. 8.1 – Tracé de la frontière d'exercice du put américain à la monnaie dans un modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $T = 1$ , et  $n = 900$ .

**Preuve :** On déduit de (A.4) que pour tout  $t$ ,  $U_{t+\delta t} \geq \varphi(S_{t+\delta t})$ . L'espérance conditionnelle et l'actualisation conservant cette inégalité, il en résulte que

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq e^{-r\delta t} \mathbb{E}(\varphi(S_{t+\delta t}) / \mathcal{F}_t).$$

Comme  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$  est une fonction convexe de  $S_t$ , l'inégalité de Jensen<sup>1</sup> implique que

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq (e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) - e^{-r\delta t} K)^+.$$

Mais comme la valeur actualisée de  $S_t$  est une martingale,  $e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) = S_t$ , et donc

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq (S_t - e^{-r\delta t} K)^+ \geq (S_t - K)^+ = \varphi(S_t),$$

la dernière inégalité résultant simplement du fait que  $-e^{-r\delta t} \geq -1$ . Des deux termes du maximum de (A.4), le second reste, pour tout  $t$ , supérieur ou égal au premier. Il n'y a donc pas d'intérêt à exercer l'option avant la date finale  $T$ .  $\square$

On notera que si l'on remplace dans ce calcul le pay-off du Call  $(S_t - K)^+$  par celui du Put  $(K - S_t)^+$ , la dernière inégalité cesse d'être satisfaite dès que  $r > 0$ . Et, de fait, si l'exercice anticipé n'est jamais intéressant dans le cas du Call, il l'est souvent dans celui du Put (sauf si  $r = 0$ ), comme nous allons le voir maintenant.

## 8.2 Théorème d'arrêt optimal

Rien dans la formule de récurrence (A.4) ne permet aisément au détenteur de l'option américaine de savoir à quel moment un exercice anticipé pourrait être intéressant pour lui. En réalité, il existe une courbe dans l'espace  $(t, S_t)$  appelée la *frontière d'exercice* (voir la figure 8.1) qui a la propriété suivante : aussi longtemps que le cours de l'actif sous-jacent  $S_t$  ne franchit pas cette courbe, un exercice anticipé n'est pas intéressant (il est préférable de garder l'option) mais dès que le cours la franchit, il est intéressant d'exercer et il est même préférable de le faire sans attendre. On ne sait pas calculer l'équation explicite de cette courbe mais on peut en calculer des approximations plus ou moins facilement. D'un point de vue théorique, on peut montrer que cette frontière d'exercice est le lieu d'un temps d'arrêt appelé *temps d'arrêt optimal*. On a le théorème suivant :

**Théorème 8.2** Si  $\mathcal{T}(t, T)$  désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans  $[t..T]_{\delta t}$ , le prix à l'instant  $t$  de l'option américaine de pay-off  $\varphi(S_t)$  est donnée par

$$U_t = \text{Max}_{\tau \in \mathcal{T}(t, T)} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\varphi(S_\tau) / \mathcal{F}_t)$$

le maximum étant atteint pour le temps d'arrêt  $\tau_t$  défini par

$$\tau_t := \text{Min} \{s \in [t..T]_{\delta t} \text{ , } U_s = \varphi(S_s)\}.$$

Notons qu'en particulier, si on applique ce théorème au cas où  $t = 0$ , la prime d'une option américaine  $U_0$  est égale à  $U_0 = e^{-rT} \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$ , où  $\tau_0$  est le premier instant où le prix de l'option est égal au pay-off,

<sup>1</sup>pour  $\varphi$  convexe,  $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$ , puisque l'hypergraphe de  $\varphi$  est convexe - observer comment sont localisés  $\mathbb{E}(X, \varphi(X))$  et  $(\mathbb{E}(X), \varphi(\mathbb{E}(X)))$ ; dans notre contexte finitaire,  $\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{E}(Y | \bar{\omega}_t)$ , où  $\bar{\omega}_t$  désigne l'atome de  $\omega$  dans l'algèbre  $\mathcal{F}_t$ .

c'est-à-dire le premier instant où le maximum de la formule (A.4) est égal au premier des deux termes. Plus précisément, tant que ce maximum est égal au second terme (espérance des valeurs futures), il n'est pas intéressant d'exercer, mais au premier instant où le pay-off dépasse la valeur de la couverture, il convient d'exercer.

**Preuve :** Pour simplifier, voici la preuve dans le cas particulier où  $t = 0$  le cas général étant très semblable.

On introduit la valeur actualisée de l'option américaine  $\tilde{U}_t$  définie par  $\tilde{U}_t = e^{-rt}U_t$  et on considère  $\tilde{U}_{t \wedge \tau_0}(\omega)$  qui est égale à  $\tilde{U}_t(\omega)$  aussi longtemps que  $t < \tau_0(\omega)$  et à une constante  $\tilde{U}_{\tau_0(\omega)}(\omega)$  pour tout  $t \geq \tau_0(\omega)$ . Cette marche est appelée la marche  $\tilde{U}$  arrêtée au temps  $\tau_0$ . Nous allons vérifier que cette marche est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale : par définition de  $\tau_0$ , comme  $1 = \mathbb{I}_{t < \tau_0} + \mathbb{I}_{t \geq \tau_0}$  et ces deux indicatrices étant  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, puisque  $\tau_0$  est un  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) &= \mathbb{I}_{t < \tau_0} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) + \mathbb{I}_{t \geq \tau_0} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t < \tau_0} (\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0}) / \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t \geq \tau_0} (\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0}) / \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t < \tau_0} (\tilde{U}_{t-\delta t} - \tilde{U}_t) / \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t \geq \tau_0} (\tilde{U}_{\tau_0} - \tilde{U}_{\tau_0}) / \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Or sur  $\{t < \tau_0\}$ ,  $\tilde{U}_{t-\delta t} = \mathbb{E}(\tilde{U}_t / \mathcal{F}_{t-\delta t})$  d'après (A.4) et donc le premier terme est nul. C'est évidemment le cas aussi du second donc  $\tilde{U}_{t \wedge \tau_0}$  est bien une martingale.

Il en résulte que  $\tilde{U}_{0 \wedge \tau_0} = \mathbb{E}(\tilde{U}_{T \wedge \tau_0})$  et donc que l'on a bien  $U_0 = \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$ .

Il reste à vérifier que pour tout temps d'arrêt  $\tau \in \mathcal{T}(t, T)$ ,  $\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$ . On a bien en effet

$$\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) = U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t \wedge \tau}) = \mathbb{E}(U_\tau) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$$

la première inégalité résultant du fait qu'une surmartingale arrêtée (ici il s'agit de  $\tilde{U}_{t \wedge \tau}$ ) est encore une surmartingale (exercice) et la seconde du fait que pour tout  $t$  on a  $U_t \geq \varphi(S_t)$  d'après (A.4).  $\square$

**Remarque :** Si l'on désigne comme nous l'avons fait pour  $U_t$ , par  $\widetilde{\varphi(S_t)}$  le pay-off actualisé, la formule (A.4) peut s'écrire plus simplement

$$\tilde{U}_t = \max\{\widetilde{\varphi(S_t)}, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)\}.$$

On peut alors vérifier que  $\tilde{U}_t$  est une surmartingale, et plus précisément que cette formule la définit comme la plus petite surmartingale qui majore le pay-off actualisé  $\widetilde{\varphi(S_t)}$ . C'est ce que l'on appelle l'enveloppe de Snell de ce pay-off actualisé  $\widetilde{\varphi(S_t)}$ .

Le théorème précédent est en fait un théorème général qui permet d'exprimer toute enveloppe de Snell comme une martingale obtenue en arrêtant de façon appropriée la surmartingale constituée par cette enveloppe de Snell.

### 8.3 Stratégie de couverture avec consommation

Nous avons justifié la définition par récurrence retrograde du prix de l'option américaine en indiquant qu'avec cette valeur le vendeur de l'option pouvait se couvrir dans tous les cas, que le détenteur exerce de façon anticipé ou non. Mais comme nous allons le voir maintenant il ne s'agit plus ici, comme dans le cas européen, d'une couverture exacte car autofinancée mais plutôt d'une *surcouverture* encore appelée *couverture avec consommation*. En effet, tant que la frontière d'exercice n'a pas été franchie, la prime  $U_0$ , investie dans un portefeuille de couverture, gérée de façon dynamique comme pour la couverture d'une option européenne, fournit une couverture exacte en ce sens que la valeur du portefeuille à chaque instant est exactement égale à la valeur de l'option américaine. Une fois la frontière d'exercice franchie (si cela a lieu), il y a deux possibilités. Soit le détenteur de l'option l'exerce, il récupère le pay-off et l'option cesse d'exister. Soit il n'exerce pas (il n'a pas noté le franchissement de la frontière d'exercice, ou il a mieux à faire) et dans ce cas le vendeur peut constituer son portefeuille de couverture à un prix strictement inférieur au pay-off et réalise un gain aux dépens du détenteur négligeant. Ce "revenu" durera aussi longtemps que le prix de l'action restera inférieur à la "frontière d'exercice" et que le détenteur de l'option n'exerce pas son droit, rapportant une richesse strictement positive que l'on désigne sous le nom de consommation et qui restera acquise au vendeur de l'option.

La couverture d'une option américaine est donc une *surcouverture* qui peut soit être une simple couverture (exacte) soit générer une consommation, selon les cas.

Il y a une façon simple et élégante de formaliser cette situation au moyen d'un résultat connu sous le nom de *Décomposition de Doob-Meyer*.

**Théorème 8.3** Soit  $\tilde{U}_t$  une  $\mathcal{F}_t$ -surmartingale. Il existe une marche aléatoire  $A_t$  croissante et prévisible (c'est-à-dire telle que pour tout  $t$   $A_t$  soit  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable) telle que

$$\tilde{U}_t = M_t - A_t$$

où  $M_t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale. Cette décomposition de  $\tilde{U}_t$  s'appelle sa décomposition de Doob-Meyer.

**Preuve :** La démonstration de ce théorème est particulièrement simple dans le cas discret où nous nous plaçons ici. On définit les deux marches  $A_t$  et  $M_t$  de la façon suivante :

$$A_0 := 0 \quad A_{t+\delta t} := A_t + \mathbb{E}(\tilde{U}_t - \tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$$

et

$$M_0 := 0 \quad M_{t+\delta t} := M_t + \tilde{U}_{t+\delta t} - \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$$

Puis on vérifie qu'elles satisfont les propriétés annoncées. Tout d'abord  $A_t$  est croissante car  $\tilde{U}_t$  est une surmartingale, et est prévisible par construction. D'autre part on a :

$$\mathbb{E}(M_{t+\delta t} - M_t / \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) / \mathcal{F}_t) = 0$$

en appliquant simplement la linéarité et la transitivité de l'espérance conditionnelle. D'où le fait que  $M_t$  soit une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.  $\square$

Dans le théorème suivant, on note, pour simplifier,  $Z_t$  le pay-off actualisé de l'option américaine.

**Théorème 8.4** Soit  $Z_t$  un processus adapté à  $\mathcal{F}_t$  et soit  $\tilde{U}_t$  son enveloppe de Snell. Soit  $\tilde{U}_t = M_t - A_t$  la décomposition de Doob-Meyer de  $\tilde{U}_t$ . Alors le temps d'arrêt optimal  $\tau_0$  défini par  $\tau_0 = \text{Min}\{s \in [0..T]_{\delta t} \mid U_s = Z_s\}$  est égal au temps d'arrêt  $\tau_A = \text{Min}\{s \in [0..T]_{\delta t} \mid A_{s+\delta t} \neq 0\}$  si  $A_T \neq 0$  et  $\tau_0 = T$  sinon.

Ce théorème affirme donc que le temps d'arrêt optimal, c'est à dire l'instant d'exercice optimal pour le détenteur, est le premier instant où le processus croissant  $A_t$  cesse d'être nul. Ce processus apparaît donc comme représentant précisément la consommation. En effet, dès que la frontière d'exercice est franchie, si le détenteur n'exerce pas l'option, la valeur de l'option cesse d'être la valeur d'un portefeuille autofinancé et commence à générer une consommation égale au processus croissant  $A_t$ . C'est cette consommation qui fait de l'option américaine une surmartingale (et non une martingale comme l'option européenne) et du portefeuille de couverture une sur couverture (et non une couverture exacte comme pour l'option européenne).

**Preuve :** La preuve montre successivement que  $\tau_A \geq \tau_0$  et que  $\tau_A \leq \tau_0$ .

- Soit  $t \in [0..T]_{\delta t}$ . Sur  $\{\tau_A = t\}$ ,  $A_t = 0$  et  $A_{t+\delta t} \neq 0$ . Donc  $\tilde{U}_t = M_t - A_t = M_t$  et  $\tilde{U}_{t+\delta t} = M_{t+\delta t} - A_{t+\delta t} < M_{t+\delta t}$ . Donc

$$\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) < \mathbb{E}(M_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) = M_t = \tilde{U}_t.$$

Comme  $\tilde{U}_t = \text{Max}\{Z_t, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)\}_2$ , ceci entraîne que  $\tilde{U}_t = Z_t$ . Donc, par définition de  $\tau_0$ ,  $\tau_A \geq \tau_0$ .

- Soit  $s \in [0..T]_{\delta t}$ . Sur  $\{\tau_0 = s + \delta t\}$ ,  $\tilde{U}_{s+\delta t} = Z_{s+\delta t}$  et  $\tilde{U}_s > Z_s$ . Donc, comme  $A_t$  est prévisible,

$$\tilde{U}_s = \mathbb{E}(\tilde{U}_{s+\delta t} / \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{s+\delta t} - A_{s+\delta t} / \mathcal{F}_s) = M_s - A_{s+\delta t} = \tilde{U}_s + A_s - A_{s+\delta t}$$

Donc  $A_{s+\delta t} = A_s$ , d'où  $\tau_A \leq \tau_0$ .  $\square$

## Chapitre 9

# Le modèle de Ho et Lee

### 9.1 Introduction

### 9.2 Un modèle discret de structure par terme



# Annexe A

## Exercices

### A.1 Les trajectoires d'un modèle à $n$ étapes

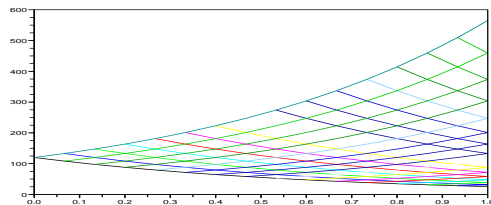
L'objet de cet exercice est de calculer et dessiner un modèle à  $n$  étapes généralisant les modèles à une et deux étapes vues en cours. Du point de vue de l'interprétation financière, il est important de comprendre que le dernier instant (d'indice  $n$ ) et l'instant initial sont fixés, respectivement à  $T$  et  $0$ , et que les  $n$  étapes correspondent à une discrétisation  $[0..T]_{\delta t}$ ,  $0 < t_0 < \dots < t_i < t_n = T$  que nous supposons régulière, avec pas de temps constant  $\delta t = \text{delta\_t} = T/n$ . Nous fixerons  $n$  mais veillerons à ce que sa valeur puisse être changée facilement d'une exécution à l'autre de la feuille de calcul.

Pour des raisons de réalisme du modèle qui apparaîtront peu à peu il est important que les facteurs  $\text{up} < 1 < \text{down}$  dépendent de  $n$  astucieusement choisie; le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) – qui sera étudié plus longuement dans les cours suivants – consiste à poser  $\text{up} = \exp(\text{sigma}/\sqrt{n}) = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  et  $\text{down} = 1/\text{up} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ . Nous choisirons pour commencer  $n=16$ ;  $T=1$ ;  $S_0 = S_0 = 140$ ;  $\sigma = \text{sigma} = 0.40$ . On notera  $\text{delta\_t} = T/n$ . Les valeurs possibles des  $S_{t_i}$  sont celles d'une marche aléatoire partant de  $S_0$ , avec  $S_{t_i} = S_{t_{i-1}} U_i$ , avec  $U_i \in \{\text{up}, \text{down}\}$ , et donc  $S_{t_i} = S_0 \text{up}^{J_i} \text{down}^{i-J_i}$ , où les  $J_i$  forment une marche de Bernoulli

$$J_0 = 0 \quad ; \quad J_i = J_{i-1} + \delta J_i \quad ; \quad \delta J_i \in \{0, 1\}.$$

Nous noterons  $j = J_i(\omega) \in \{0, \dots, i\}$  et  $S(i, j) = S_0 \text{up}^j \text{down}^{i-j}$ . Nous tabulerons les valeurs possibles de  $S(i, j)$  dans une matrice  $\text{SS}(1 : n+1, 1 : n+1) := S(i, j)$ .

1. Ouvrir une feuille Scilab TP1.sce. Initialiser les diverses constantes évoquées. Calculer la matrice SS. Notez que cette matrice est triangulaire (inférieure), puisque  $j \leq i$ .
2. Tracer l'“arbre de Cox” joignant les points  $(i * \delta t, S(i, j))$  à  $((i + 1) * \delta t, S(i + 1, j + \delta J_{i+1}))$ , avec  $\delta J_{i+1} \in \{0, 1\}$  :



Arbre de Cox-Ross-Rubinstein :

#### Indications :

`xset("window",1)` choisit (et éventuellement crée) la fenêtre 1 comme fenêtre graphique courante (qu'on peut effacer au moyen de `clf(1)`).

`plot2d(Abs,Ord)` trace les lignes polygonales (ouvertes) dont les abscisse et les ordonnées des sommets figurent dans les colonnes homologues des matrices notées ici **Abs** et **Ord**.

Voici un code qui utilise un algorithme parcourant tous les cotés de l'arbre une fois et une seule, en  $n + 1$  lignes polygonale joignant  $n + 1$  sommets, et qui se prête donc bien à la syntaxe de `plot2d`. Utilisez les commentaires du code pour comprendre l'algorithme sur le dessin, pour une petite valeur de  $n$ ,  $n=10$  par exemple.

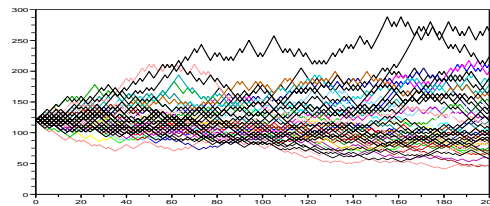
```
Abs=zeros(n+1,n+1); // le dessin comportera n+1 lignes polygonales
Ord=zeros(n+1,n+1); // ayant chacune n cotes, donc n+1 sommets
```

```

for k=0 :n // k numerote les lignes polygonales
  for l=0 :n-k // premieres moitie : depart en (t,S(t,k)) avec t=k*delta_t
    Abs(l+1,k+1)=(k+1)*delta_t ; // les abscisses croissent
    Ord(l+1,k+1)=SS(k+1+1,k+1) ; // et les ordonnees decroissent : j=k=Cste
  end ; // on arrive en (T,S(T,k)) avec T=n*delta_t
  for l=1 :k // on repart de ce point
    Abs(n-k+l+1,k+1)=(n-l)*delta_t ; // avec les abscisses qui diminuent
    Ord(n-k+l+1,k+1)=SS(n-l+1,k-l+1) ; // et les ordonnees aussi
  end ; // la lignes n°k abouti en (t,S(t,0)) avec t=(n-k)*delta_t
end ;
xs2eps(1,'ArbreCox.eps') et xs2gif(1,ArbreCox.gif) permettent de sauvegarder votre figure
dans la norme eps et gif respectivement.

```

3. Pour  $n=200$  calculer puis représenter  $M=40$  trajectoires aléatoires<sup>1</sup> du processus de CRR.



Des trajectoires tirées aléatoirement :

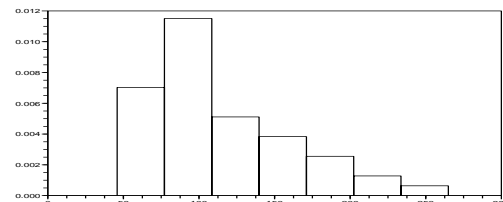
#### Indications :

`rand(n,M,'uniform')` retourne une matrice  $n \times M$  de nombres aléatoires uniformément distribués sur  $[0, 1]$ .

Que retourne `int(p+rand(n,M))`, à votre avis (si  $p \in ]0, 1[$ ) ?

Et `cumsum(deltaJ,"r")` ?

4. A l'aide de l'instruction `histplot` représenter un histogramme des valeurs finales de vos trajectoires aléatoires; on pourra par exemple prendre `int(sqrt(M))` pour nombre de classes :



Histogramme des valeurs finales obtenues :

## A.2 Les trajectoires du call d'un modèle à $n$ étapes

L'objet de cet exercice est de calculer et dessiner les valeurs d'une option Call d'un modèle à  $n$  étapes généralisant les modèles à une et deux étapes vues en cours.

On reprend toutes les notations du TP1; de ce point de vue, il peut être plus simple, pour la feuille TP2.SCE de script, de partir de la feuille TP1.SCE, on supprimant les passages sans objet ici.

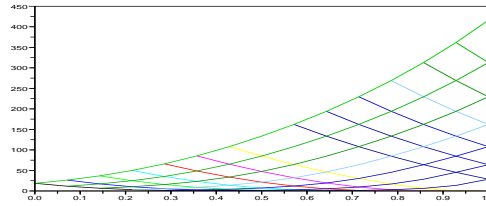
Nous choisirons toujours, pour commencer  $n=16$ ;  $T=1$ ;  $S_0 = S_0=140$ ;  $\sigma = \text{sigma}=0.40$ .

Nous tabulerons les valeurs possibles  $C(i, j)$  d'une option Call de prix d'exercice  $K = S_0$  (option "à la monnaie"), lorsque l'action vaut  $S(i, j)$ , dans une matrice  $CC(1 :n+1, 1 :n+1) := S(i, j)$ .

- Définir la fonction `phi(S)` retournant la valeur  $(S - K)^+$  d'un Call à la date d'exercice  $T$  et de prix d'exercice  $K$ .
- Calculer la matrice (triangulaire) `CC`.  
**Indication :** la *probabilité risque-neutre* est caractérisée par  $p := \mathbb{P}^*(\{\delta J_{i+1} = 1\}) = \frac{R-d}{u-d}$ , avec  $R = e^{r\delta t}$ ,  $u = \text{up}$ , et  $d = \text{down}$ . Prendre  $r = 0.05$ .
- Que vaut la Call à la monnaie à la date  $t = 0$  ?

<sup>1</sup>Pour  $p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 1\})$  et donc  $1 - p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 0\})$ , on choisit pour le moment  $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ .

4. Tracer l'arbre joignant les points  $(i*\delta t, C(i, j))$  à  $((i+1)*\delta t, C(i+1, j+\delta J_{i+1}))$ , avec  $\delta J_{i+1} \in \{0, 1\}$  :



Arbre du Call :

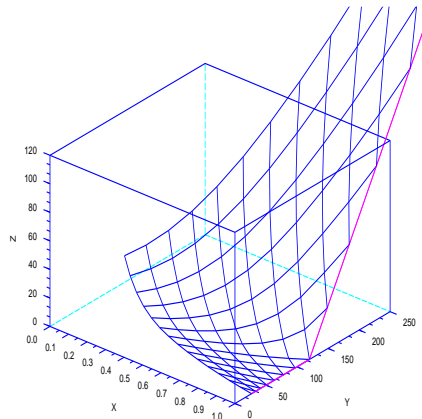
**Indications :**

`plot2d(Abs,Cot)` trace les lignes polygonales (ouvertes) dont les abscisse et les ordonnées des sommets figurent dans les colonnes homologues des matrices notées ici `Abs` et `Cot`. Il suffit de remplacer la matrice `Ord` du TP1 qui comportait des valeurs de `SS`, par une matrice analogue `Cot` comportant les valeurs correspondantes de `CC`.

`xs2eps(1, 'ArbreCoxCall.eps')` et `xs2gif(1, ArbreCoxCall.gif)` permettent de sauvegarder votre figure dans la norme `eps` et `gif` respectivement.

5. Pour  $n=200$  calculer puis représenter  $M=40$  trajectoires aléatoires<sup>2</sup> du processus de prix du Call dans ce modèle de CRR.  
6. On revient à  $n=15$ . Tracer, au moyen de la fonction `param3d1`, le "filet du Call".

**Indication :** utiliser `param3d1(Abs,Ord,Cot,alpha=50,theta=-89,flag=[2,4])` puis, en cliquant sur GED, sélectionnez `Axes`, choisissez l'onglet `Aspect`, et cochez la case `Cube Scaling On`. Pour améliorer la lisibilité du dessin, représenter, au niveau  $t = T$  (et donc  $i=n$ ) le graphe de `phi(SS(n+1, :))`, c'est-à-dire de la fonction de payoff. Pour cela former les vecteurs (colonnes) `AbsLignePayOff`, `OrdLignePayOff`, `CotLignePayOff`.



Filet du Call :

7. Recommencer le tracé avec  $n = 150$ ; qu'observez-vous? Savez-vous comment demander à Scilab de ne tracer que les segments contenus dans la boîte `[0..T, 0..3*S0, 0..2*S0]` ?

## A.3 Calcul de prix par espérance conditionnelle

Vous avez vu en cours qu'à tout moment  $i\delta t = t \leq T$ , lorsque le sous-jacent  $S_t$  vaut  $s$ , le prix  $C_t$  d'une option européenne de payoff  $\varphi(S_T)$  (options *vanilles*) est donné par

$$C_t = C(t, S_t), \text{ avec } C(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(\varphi(S_T) \mid \{S_t = s\}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(\varphi(su^L d^{n-i-L})), \quad (\text{A.1})$$

où  $L \rightsquigarrow \mathcal{B}(n-i, p)$ , avec  $u = \text{up}$ ;  $d = \text{down}$ ;  $p = \frac{R-d}{u-d}$  et  $R = e^{r\delta t}$ .

L'objet de cet exercice est d'utiliser ce résultat pour obtenir diverses illustrations relatives aux options vanilles.

On reprend toutes les notations du TP1; nous choisissons toujours, pour commencer  $n=16$ ;  $T=1$ ;  $K = S_0 = S_0=140$ ;  $r = r=0.05$ ;  $\sigma = \text{sigma}=0.40$ ;  $\varphi(S) = \text{phi}(S) = \max(S-K, 0) = (S - K)^+$ .

1. Exécutez la commande `plot2d(0 :50, binomial(0.4, 50))`. Devinez-vous ce que retourne la fonction Scilab `binomial(p, n)`? A défaut, consultez l'aide en ligne...

<sup>2</sup>Pour  $p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 1\})$  et donc  $1-p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 0\})$ , on choisit à présent  $p = \frac{R-d}{u-d}$ .

2. Tabuler les valeurs possibles  $C(i, j)$  d'une option Call de prix d'exercice  $K = S_0$  (option "à la monnaie"), lorsque l'action vaut  $S(i, j)$ , dans une matrice CCC(1 :n+1, 1 :n+1) des valeurs de  $C(i, j)$  en utilisant cette fois-ci la formule A.1.  
Vérifiez que vous retrouvez bien la même valeur qu'avec la méthode de la fois précédentes pour le Call à la monnaie à la date  $t = 0$ ?
3. Pour  $l=0 :n$ , tracez toutes les courbes joignant les  $(S(n-l, j), C(n-l, j))$  successifs, pour  $j=0 :n-1$  (ou plutôt  $j=0 : \min(n-1, j_{\max})$  où  $j_{\max}=10$  si  $n=16$ ).
4. Représenter (dans une nouvelle fenêtre) le graphe du prix du Call (à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $K \in [\frac{1}{2}S_0.. \frac{3}{2}S_0]_{\delta K}$  pour  $\delta K = S_0/10$ . Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.
5. Représenter (dans une nouvelle fenêtre, par `scf(2)`) le graphe de la prime du Call (prix à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $\sigma \in [\delta\sigma..0.5]_{\delta\sigma}$  pour  $\delta\sigma = 0.01$ . Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.
6. Reprenez ces deux dernières questions pour un Put, de payoff  $\varphi(S) = (K - S)^+$ .

## A.4 Le Delta de couverture

Lors du TD 3 vous avez tabulé, dans une matrice CCC, les valeurs  $CCC(i+1, j+1) = C(i, j)$  d'une option, lorsque  $S_{i\delta t} = S(i, j) = SS(i+1, j+1)$ . et, pour  $l=0 :n$ , vous avez tracé toutes les courbes des prix, c'est-à-dire les courbes joignant les  $(S(n-l, j), C(n-l, j))$  successifs, pour  $j=0 :n-1$  (ou plutôt  $j=0 : \min(n-1, j_{\max})$ ) Le code ci-dessous permet de faire cela selon une animation (Choisir  $n=100$ )

```
scf(1); //on se place dans la fenetre 1
jmax=int(sqrt(n)); //maximum de up faire figurer dans le cadre
rectangle=[0,0,SS(jmax,jmax),CCC(jmax,jmax)]; // [Smin,Cmin,Smax,Cmax]
driver("X11") //pas d'enregistrement des operations graphiques
xset("pixmap",1) //on passe en mode double buffer
plot2d(0,0,frameflag=5,rect=rectangle) //on fixe l'echelle
for l=n :-1 :0 //on attaque la boucle d'animation
    xset("wwpc") //effacement de la pixmap
    plot2d(SS(n+1-l,1 :n+1-l),CCC(n+1-l,1 :n+1-l),frameflag=0)
    xset("wshow") //basculement de la pixmap a l'ecran
    halt() // il faudra passer dans la fenetre scilab et appuyer une touche
end; //... et on deboucle
xset("pixmap",0) //retour a l'affichage direct a l'ecran
driver("Rec") //retour au driver par default
```

Vous avez vu en cours qu'à tout moment  $i\delta t = t \leq T$ , lorsque le sous-jacent  $S_t$  vaut  $s = S(i, j)$ , l'option  $C_t$  vaut  $C = C(i, j)$  le portefeuille de couverture doit comporter un nombre  $\Delta_t = a$  de sous-jacent, avec

$$a = \Delta_t = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = \Delta(i, j) = DD(i+1, j+1),$$

avec  $C^+ = C(i+1, j+1)$ ,  $C^- = C(i+1, j)$ ,  $S^+ = S(i+1, j+1)$ , et  $S^- = S(i+1, j)$ .

On reprend toutes les notations du TP3; en particulier  $r = r=0.05$ ;  $\sigma = \sigma=0.40$ ;  $\varphi(S) = \text{phi}(S) = \max(S-K, 0) = (S - K)^+$ .

1. Expérimentez le code d'animation ci-dessus
2. Tabulez les valeurs  $\Delta(i, j) = DD(i+1, j+1)$  des quantités d'actions à détenir pour couvrir l'option.
3. Pour  $l=n :-1 :0$ , tracez toutes les courbes joignant les  $(S(n-l, j), \Delta(n-l, j))$  successifs, pour  $j=0 :n-1$ , en vous inspirant du code fourni.
4. Reprenez ces deux dernières questions pour un Put, de payoff  $\varphi(S) = (K - S)^+$ .
5. S'il vous reste du temps, terminez la fiche TD3 : graphe du prix du Call (à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $K \in [\frac{1}{2}S_0.. \frac{3}{2}S_0]_{\delta K}$  pour  $\delta K = S_0/10$  (Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.) et ...
6. Représentez (dans une nouvelle fenêtre, par `scf(2)`) le graphe de la prime du Call (prix à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $\sigma \in [\delta\sigma..0.5]_{\delta\sigma}$  pour  $\delta\sigma = 0.01$ . (Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.)

## A.5 La formule de Black et Scholes ; convergence des prix CRR vers BS

1. Définir une fonction `BlackScholes(S,K,r,T,σ)` donnant la valeur du Call de prix d'exercice  $K$  à la date d'exercice  $T$  lorsque le taux (constant) vaut  $r$  et la volatilité est égale à  $\sigma$ , en utilisant la formule de Black et Scholes

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \text{ avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln \frac{S_0}{K} + T \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

**Indication :** voyez la fonction `erf` de Scilab.

2. Utiliser la relation Call-Put

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)},$$

pour définir une fonction `Put(S,K,r,T,σ)`.

3. Utiliser la formule fondamentale de Cox-Ross-Rubinstein

$$CRR = S_0\Phi(n, k, q) - Ke^{-rT}\Phi(n, k, p) \text{ avec } u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, p = \frac{R-d}{u-d} \text{ et } q = \frac{pu}{R}$$

pour définir une fonction `CRR(n,S,K,r,T,σ)` donnant le prix du Call dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

4. Tracer `CRR(n,140,140*a,0,1,0.40)` pour  $n = 10..100$  et  $a \in \{1, 0.9, 1.1\}$  et la valeur correspondante dans un modèle de Black et Scholes.

## A.6 Calcul de prix d'options barrière

1. Calculer puis tracer en fonction du nombre  $N$  de pas de discrétisation, le prix d'une option DIC sur le sous-jacent

$$\begin{cases} S_0 & = & 140 \\ S_{t+\delta t} & = & S_t \exp(\pm\sigma\sqrt{\delta t}) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

d'échéance  $T = 1 (= N\delta t)$ , de prix d'exercice  $K = 140$  et de barrière  $L = 130$ . On supposera  $\sigma = 0,4$  et  $r = 0$ .

2. Comparer avec le prix du call vanille de mêmes paramètres (dessin).
3. Même exercice pour  $K = 120$ .
4. En déduire le prix de la DOC pour les mêmes valeurs des paramètres (dessin).
5. Reprendre les questions précédentes pour un put avec barrière.

NB : il convient d'utiliser les formules en pages 5 et 6 de *Asymptotics of the price of a barrier option in a tree model* qui vous a été distribué.

## A.7 Calcul de prix d'options parisiennes

On appelle *option parisienne* une option Call ou Put qui prend (*in*) ou perd (*out*) sa valeur si le cours de l'actif sous-jacent passe *assez de temps* sous (*down*) ou au-dessus (*up*) d'une barrière  $L$ . L'instant présent est  $t = 0$ ; l'échéance est  $T$ ; le cours présent du sous-jacent est  $S_0$ ; le prix d'exercice est  $K$ . "Assez de temps" signifie une durée au-delà de la barrière égale à  $\tau$ , appelée *durée d'excursion*. Cette durée peut être *cumulative* (on compte tous les jours passés au-delà de la barrière) ou *non-cumulative* (on ne compte que les jours consécutifs passés au-delà de la barrière). Nous noterons `DICPc(τ)` le prix (prime) d'une option Call parisienne cumulative qui ne prend valeur qu'après une excursion cumulée de durée  $\tau$  sous la barrière  $L$ . De façon analogue, nous noterons `DOCPnc(τ)` le prix (prime) d'une option Call parisienne non-cumulative qui perd sa valeur après toute excursion sous la barrière  $L$  de durée  $\tau$ . De façon analogue, on définirait `DIPPc(τ)` ou `DOPc(τ)` ou `DIPPnc(τ)` ou `DOPnc(τ)`, et analogue on ajoutant le suffixe `Pc(τ)` ou `Pnc(τ)` aux noms des options barrières usuelles

1. Que peut-on dire du signe de `DIC-DICPc(τ)` ? (expliquer)
2. Que peut-on dire de `DICPc(τ)+DOCPc(τ)` ? (expliquer)

3. Nous nous proposons de calculer une estimation de  $\text{DICPc}(\tau)$ , en utilisant un modèle d'arbre binaire, subdivisant  $[0, T]$  en  $N$  intervalles égaux de longueur  $\delta t = T/N$ , avec

$$\begin{cases} S_0 &= 1 \\ S_{t+\delta t} &= S_t \exp(\pm \sigma \sqrt{\delta t}) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

dans le cas  $T = 1$ ,  $\tau = \text{minitime} = 0.30$ ,  $S_0 = 140$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $K = 140$ ,  $r = 0.05$ ,  $L = 126$ . Voici un code calculant la valeur de l'option en chaque noeud  $(i, j)$  de l'arbre, pour  $n = 17$  :

```
N=17;
T=1;minitime=0.3;// Barrier option corresponds to minitime=1/N;
delta_t=T/N;
S0=140;K=S0; L=S0*0.9;//barrier
r=0.05;sigma=0.4;
up=exp(sigma*sqrt(delta_t)); down=exp(-sigma*sqrt(delta_t));
p=(exp(r*delta_t)-down)/(up-down);
function y=S(n,j) //j=nb of up
    y=S0*up^j.*down^(n-j);
endfunction;
function po=PayOffCall(S,K);
    po=max(S-K,0);
endfunction;
function under=underL(n,j)// equal to 1 if S(n,j) is under the barrier L
    if S(n,j)<=L then under=1;
        else under=0
            end;
endfunction;
PCall=zeros(N+1,N+1,N+1); //PCall(n+1,j+1,k+1); k = number of steps ending
//under the barrier L
for j=0 :N
    for k=0 :N
        if k*delta_t >= minitime then PCall(N+1,j+1,k+1)=PayOffCall(S(N,j),K);
            else PCall(N+1,j+1,k+1)=0;
                end;
            end;
        end;
    end;
for n=N-1 :-1 :0
    for k=0 :n
        for j=0 :n
            PCall(n+1,j+1,k+1)=exp(-r*delta_t)*..
                (p*PCall(n+1+1,j+1+1,k+underL(n+1,j+1)+1)+..
                    (1-p)*PCall(n+1+1,j+1,k+underL(n+1,j)+1));
                end;
            end;
        end;
    end;
disp('minitime='), disp(minitime)
PriceParisianCall=PCall(1,1,1);
disp('Price Parisian Call='), disp(PriceParisianCall)
```

Calculer une estimation de l'option  $\text{DICPc}(0.4)$  pour  $N = 14$  puis  $N = 15$  et  $N = 16$ . Qu'observez-vous ?

4. Adaptez votre programme pour que `PriceParisianCall` devienne un vecteur donnant les valeurs de  $\text{DICPc}(0.4)$  pour  $N=1 :30$ . Tracer en fonction du nombre  $N$  de pas de discrétisation, le prix d'une option  $\text{DICPc}$ , pour  $N=1..30$  (modifier éventuellement 30 à une valeur différente, en fonction de la puissance de votre machine).

5. Qu'observez-vous pour les petites valeurs de  $N$  ? Comment expliquez-vous cela ?
6. Comment adapter ce programme pour qu'il donne le prix d'une option DIC de même prix d'exercice  $K$  et même barrière  $L$  en fonction de  $N$ . NB : ceci peut se faire très facilement (expliquez comment). Qu'obtenez-vous pour DIC(14) ?
7. Représentez sur un même graphique le prix d'une DICPc et d'une DIC en fonction de  $N$ . Qu'observez-vous ? (il y a au moins deux remarques possibles).
8. Adaptez votre programme pour qu'il calcule le prix d'une option Call parisienne *non-cumulative* DICPnc . Reprendre sur un même dessin les prix de DIC, DICPc, et DICPnc pour  $N=1 : 30$ .

## A.8 Options américaines

On considère un processus  $S_t$ , défini pour tout  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T\}$ ,  $T =: N\delta t$  qui représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps. On appelle option américaine de payoff  $\varphi(S_t)$  et de date d'échéance  $T$  un contrat qui peut être exercé à toute date  $t \in [0..T]_{\delta t}$  et qui rapporte  $\varphi(S_t)$  à son détenteur s'il l'exerce à l'instant  $t$ . Lorsque  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ , on parle de *call américain* et lorsque  $\varphi(S_t) = (K - S_t)^+$ , on parle de *put américain*. On désigne par  $U_t$  la valeur à l'instant  $t$  d'une option américaine dont le payoff, à l'instant  $t$ , est  $\varphi(S_t)$ . On désigne par  $R = e^{r\delta t}$  le taux d'escompte entre les dates  $t$  et  $t + \delta t$  (supposé connu et constant).

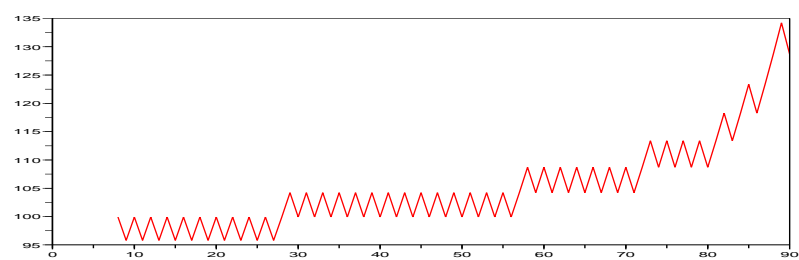
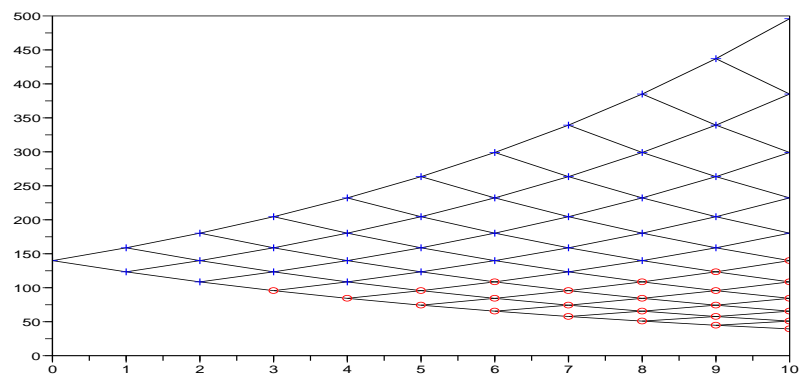
Une adaptation du raisonnement simple mené pour les options européennes permet de se convaincre que  $U_t$  vérifie la relation de récurrence descendante suivante :

$$\begin{cases} U_t &= \text{Max} \left( \varphi(S_t), \frac{1}{R} \mathbb{E}_t^*(U_{t+\delta t}) \right) \\ U_T &= \varphi(S_T) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où  $\mathbb{E}_t^*$  est l'espérance conditionnelle au sens de la probabilité "risque neutre".

1. Poser  $N=10$ ,  $S_0=140$ ,  $K=S_0$ ,  $\text{sigma}=0.4$ ,  $r=0.05$ , et créer par récurrence rétrograde (sur  $\mathbf{n}$ ) une matrice  $\text{CC}$  de taille  $\mathbf{N}+1 \times \mathbf{N}+1$  telle que  $\text{CC}(\mathbf{n}+1, \mathbf{j}+1)$  soit égale à la valeur du Call (européen) lorsque  $t = n\delta t$  et  $S_t = S(\mathbf{n}, \mathbf{j})$  ( $\mathbf{j} \leq \mathbf{n}$ ).
2. En utilisant la formule de récurrence rétrograde (A.4) dans le cas d'un call, créer de manière analogue une matrice  $\text{CCAmer}$  correspondant aux valeurs d'un Call américain.
3. Comparez les valeurs à l'instant initial (=prime) d'un Call et d'un Call européen. Commentez
4. Plus généralement, comparez  $\text{CC}(\mathbf{n}+1, \mathbf{j}+1)$  et  $\text{CCAmer}(\mathbf{n}+1, \mathbf{j}+1)$ . (Commentez).
5. Créer de manière analogue des matrices  $\text{PP}(\mathbf{n}, \mathbf{j})$  et  $\text{PPAmer}(\mathbf{n}, \mathbf{j})$  correspondant aux valeurs d'un Put et d'un Put américain.
6. Comparez les valeurs des primes du Put et du PutAméricain. Commentez
7. Recommencer avec  $N=200$ . Commentaire
8. Recommencer avec  $r=0$ . Commentez
9. On revient à  $r=0.05$ . Sur l'arbre binaire représentant les valeurs de l'actif sous-jacent, représenter les noeuds en deux couleurs différentes selon que le Max de la formule de récurrence est égal à  $\varphi(S_t)$  ou à  $\frac{1}{R} \mathbb{E}_t(U_{t+\delta t})$ . On obtient ainsi deux régions séparées par la "frontière d'exercice". On pourra prendre  $N = 20$ , puis  $N = 100$ . On créera pour ce faire une matrice  $\text{ExerPA}(\mathbf{n}, \mathbf{j})$  ayant la valeur 1 ou 0 selon que  $\frac{1}{R} \mathbb{E}_t(U_{t+\delta t}) < \varphi(S_t)$  ou non, où  $U_t = \text{PPAmer}(\mathbf{n}+1, \mathbf{j}+1)$  et donc  $U_{t+\delta t} = \text{PPAmer}(\mathbf{n}+2, \mathbf{j}+1)$  ou  $U_{t+\delta t} = \text{PPAmer}(\mathbf{n}+2, \mathbf{j}+2)$ . (La matrice  $\text{ExerPA}(\mathbf{n}, \mathbf{j})$  est triangulaire puisqu'on ne considère que les  $\mathbf{j} \leq \mathbf{n}$  ; commencez par initialiser la matrice avec  $-\text{ones}(\mathbf{N}+1, \mathbf{N}+1)$  afin de distinguer les valeurs calculées des autres) Pour rendre plus lisible cette frontière d'exercice sur le dessin, on pourra choisir de ne pas représenter les arêtes de l'arbre mais seulement les noeuds et se borner à ne tracer que la "partie basse" de l'arbre (par exemple en se limitant aux noeuds pour lesquels  $S \leq 2 * S_0$ ). Pour déterminer les syntaxes Scilab vous pouvez taper les commandes `apropos plot` , et `apropos LineSpec`.
10. Tracer la frontière d'exercice, à la manière du la figure 8.1 du poly qui vous a été distribué. Commencer par  $N=90$ , puis  $N=900$  (ou la valeur la plus grande de  $N$  compatible avec votre programme et ordinateur.)
11. Examiner comment varie la frontière d'exercice si l'on fait varier les paramètres  $r$  et  $\sigma$ .
12. Ecrire un algorithme permettant de calculer à chaque instant la composition  $\text{DeltaAmer}(\mathbf{n}, \mathbf{j})$  en actif risqué du portefeuille de couverture d'un put américain, lorsque la valeur de l'actif sous-jacent vaut  $S(\mathbf{n}, \mathbf{j})$ . Observez et commentez le signe de  $\text{DeltaAmer}(\mathbf{n}, \mathbf{j})$

13. Tracer une trajectoire aléatoire et la valeur  $\text{DeltaAmer}(n, j) * S(n, j)$  investie en action dans le portefeuille de couverture.



## A.9 Modèles de Ho et Lee, et produits de taux d'intérêts

Un modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon  $Z_t^T$ ,  $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$ ,  $\delta t := T_{\max}/N$ ,  $t \leq T$ , où  $Z_t^T$  désigne la valeur à la date  $t$  d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date  $T$ . On a donc  $Z_T^T = 1$  pour n'importe quel  $T \in \mathbb{T}$ . C'est un modèle probabiliste sur un ensemble  $\Omega$  servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  servant à coder l'information disponible à la date  $t \in \mathbb{T}$ . En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$ ,  $\mathbb{T}^* := ]0..T]_{\delta t}$ ,  $X_t \in \{0, 1\}$ , les  $X_t$  de même loi  $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$ ,  $\mathcal{F}_t$ -mesurables, et indépendantes de  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ <sup>3</sup>. Pour tout  $t \in \mathbb{T}^*$ , posons  $J_t := \sum_{s \in ]0..t]_{\delta t}} X_s$ . Notons  $n$  et  $k$ ,  $n \leq k$ , les entiers tels que  $t = n\delta t$  et  $T = k\delta t$ ; la caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les  $Z_t^T(\omega)$  appartiennent à un arbre binaire recombinaison, c'est-à-dire que,  $Z_{n\delta t}^T(\omega)$  ne prend que  $n+1$  valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur  $j = J_{n\delta t}(\omega)$ . Pour  $0 \leq j (= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$ , nous noterons  $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega) := Z(\mathbf{n}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

1. Montrer que  $Z(\mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$ .
2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t} \eta(\theta^T(t), X_t), \text{ où } \theta^T(t) := T - t, \quad (\text{A.5})$$

pour une fonction  $\eta$  définie par le choix<sup>4</sup> d'un  $\delta > 1$ , caractérisant, avec  $\pi \in ]0, 1[$ , le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \quad (\text{A.6})$$

Les valeurs des  $Z_0^T$ ,  $T \in \mathbb{T}$ , peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché.

Vérifier que  $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t) \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) = \mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t)) = 1$ , pour tout  $\theta$  et  $t$  dans  $\mathbb{T}^*$ , et où  $\mathbb{E}^*$  désigne l'espérance pour la probabilité  $\mathbb{P}^*$ .

3. On définit le taux court, "sans risque"  $r_t$ , par

$$Z_t^{t+\delta t}(1 + r_{t+\delta t}) = 1; \quad (\text{A.7})$$

on voit donc que  $r_{t+\delta t}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable (on dit que le processus  $(r_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$  est  $\mathbb{F}$ -prévisible); on pose

$$B_t := (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t) \text{ et } \tilde{Z}_t^T := Z_t^T / B_t.$$

En établissant que  $\mathbb{E}^*(\tilde{Z}_t^T \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) = \tilde{Z}_{t-\delta t}^T$ , montrer que  $(\tilde{Z}_t^T)_{t \in \mathbb{T}}$  est une  $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$ -martingale, et que ce modèle est donc sans arbitrage.

4. Voici une implantation du modèle pour lequel on a  $T_{\max} = N$  (et donc  $\delta t = 1 = \text{delta\_t}$ ),  $t = \mathbf{n} * \text{delta\_t}$ ,  $T = \mathbf{k} * \text{delta\_t}$ ,  $J_t(\omega) = \mathbf{j}$ ,  $T - t = 1 * \text{delta\_t}$ ,  $T = \mathbf{k} * \text{delta\_t}$ ,  $\eta(T - t, X_t(\omega)) = \text{eta}(1 * \text{delta\_t}, \mathbf{x})$ , pour  $\mathbf{x} = X_t(\omega)$ ,  $Z_t^T(\omega) = Z(\mathbf{n}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , pour  $J_t(\omega) = \mathbf{j}$ , avec les choix  $\pi = \text{pi} := 0.5$ , et  $\delta = \text{delta} := 1.01$ .

```
// Modèle de Ho et Lee
clear ; Nmax=8 ; Tmax=Nmax ; delta_t=Tmax/Nmax ;
pi=0.5 ; delta=1.01 ; r=0.025 ;
function z0=Z0(k) ; z0=(1+r)^(k*delta_t) ; endfunction ;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax)) ;
//
function ee=eta(1,x) ;
if x==0
ee=(1^1)/(pi+(1-pi)*delta^1) ;
else ee=delta^1/(pi+(1-pi)*delta^1) ;
end ;
endfunction ;
// représentation des eta extrêmes
```

<sup>3</sup>Attention, dans l'article de M. Leippold et Z. Wiener ( <http://papers.ssrn.com/abstract=292225> ), il est fait le choix  $\mathbb{P}(X_t = 0) = (1 - \pi)$

<sup>4</sup>C'est le choix  $\delta = \eta(\delta t, 1)/\eta(\delta t, 0) > 1$  qui exprime qu'un  $X_t(\omega) = 1$  code un "up" et  $X_t(\omega) = 0$  code un "down"

```

xset("window",1);clf(1);
Nprime=1000;for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)); end;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1);
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k);
end;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1);
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1);
end;
end;
end;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1);
endfunction;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2);clf(2);
N=Nmax;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N),'-b'); end;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1);
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N);
end;
plot(n1 :N,Vecteur,'--r');
end;
xs2gif(2,'arbHoLee.gif');xs2eps(2,'arbHoLee.eps');xs2fig(2,'arbHoLee.fig');

```

- (a) Comment a été choisie la fonction  $T \mapsto Z_0^T$  constituée par les valeurs initiales de  $Z_t^T$  ?
- (b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de  $Z^8$  : que vaut  $Z_8^8$  ? Que vaut  $Z_0^8$  et retrouver cette valeur sur la courbe `StructureParTermesInitiale` ? Que vaut  $Z_4^8$  après deux "up" et deux "down" ? Que vaut  $Z_6^8$  après rien que des "up" ? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance  $T = 8$  est "above par" ; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle ?

5. **Taux actuariels** : On appelle taux actuariel (Yield) d'un zéro-coupon le taux noté  $Y_t^T$  tel que

$$Z_t^T(1 + Y_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour  $t < T$ .

- (a) Définir une fonction  $Y(n, j, k)$  correspondant au zéro-coupon  $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$  quand  $J_{n\delta t}(\omega) = j$ , qui est lui de valeur  $Z(n, j, k)$ .
- (b) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de  $Y_t^T$  aux deux valeurs  $Y_{t+\delta t}^T$  pouvant lui succéder dans ce modèle.
- (c) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour  $Z_6^8$  dans la question précédente.
6. **Caplets et Caps** : Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal  $K$ . Typiquement, si l'intérêt  $r_T$  payable à la date  $T$  pour l'emprunt d'un euro à la date  $T - \delta t$ , ce contrat payera  $(r_T - K)^+$ . Ce contrat s'appelle un *caplet* à l'échéance  $T$  au plafond  $K$ . Pour le prêt d'un euro remboursable à la date  $T_{\max}$  et à intérêts payable à intervalle  $\delta t =$  un an, il convient de souscrire

un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance  $T \in ]0, T_{\max}]_{\delta t}$ . Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date  $t - \delta t$ , par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en  $Z_{t-\delta t}^t$  et en placement (risqué) en  $Z_{t-\delta t}^{t+\delta t}$ . Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et, comme les processus  $(\tilde{Z}_t^T)_{t \in [0, T]}$  sont, pour tout  $T \in \mathbb{T}$ , des  $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$ -martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\text{Caplet}_{t-\delta t}^T = \mathbb{E}^*(\text{Caplet}_t^T \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) / (1 + r_t) \quad (\text{A.8})$$

(et plus généralement, pour tous  $s \leq t$ ,  $\text{Caplet}_s^T = \mathbb{E}^*(\text{Caplet}_t^T \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s)$ ). De manière similaire au cas des zéro-coupons et taux actuariels, notons  $\text{Caplet}_t^T(\omega) = \text{Caplet}(n, j, k)$ , toujours avec  $t = n\delta t$ ,  $J_t(\omega) = j$ , et  $T = k\delta t$ .

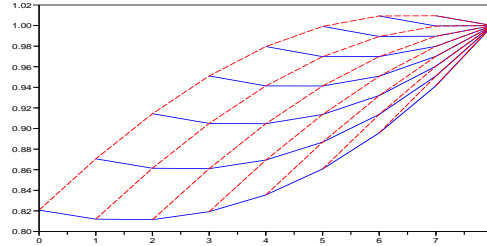
**n=k**) Comment définir  $\text{Caplet}(k, j, k)$  ?

**n=k-1**) Comme  $1/(1 + r_t) = Z_{t-\delta t}^t$ , montrer que  $\text{Caplet}(k-1, j, k) = \text{Caplet}(k, j, k) * Z(k-1, j, k)$ .

**n<k-1**) Exprimer  $\text{Caplet}(n, j, k)$  en fonction de  $\text{Caplet}(n+1, j, k)$  et  $\text{Caplet}(n+1, j+1, k)$  lorsque  $n < k-1$ , en utilisant (A.8).

**func**) Définir une hypermatrice  $\mathbb{C}\text{Caplet}(n, j, k)$  et une fonction  $\text{Caplet}(n, j, k)$  donnant la valeur de  $\text{Caplet}_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$  lorsque  $J_{n\delta t}(\omega) = j$ .

**Application :** Dans le modèle de Ho et Lee considéré (où  $r_{\delta t} = 2,5\%$ ), quel est le prix d'un contrat de plafonnement à  $K = 4,5\%$  des intérêts payés annuellement sur un emprunt de 1.000.000 euros sur 15 ans. Idem pour un plafonnement à 3,5%



## A.10 Incidence du paiement d'un dividende sur le prix d'une action et d'une option

Le paiement de dividendes est, avec le droit de révoquer le management (les gestionnaires de l'entreprise côtéée), le principal contrôle qu'exercent les actionnaires sur cette entreprise. La date  $t^*$  et le montant  $D$  de ce dividende sont fixés par l'AG, longtemps avant  $t^*$ . Le marché anticipe donc ce paiement. Si l'on note  $\Pi_t$  la valeur d'un portefeuille géré en dividende réinvesti (on ne modifie pas la somme qu'on a investie dans l'entreprise), il est légitime de supposer que c'est  $\Pi_t$  qui suit un modèle CRR :

$$\Pi_0 = S_0, \quad \Pi_{t+\delta t} = \Pi_t^\pm := \Pi_t u^\pm \text{ avec } u^+ = \text{up} = u \text{ et } u^- = \text{down} = d.$$

Par gestion en dividende réinvesti on entend qu'à la date  $t^*$ , lorsque  $D$  est versé, la somme sert à acheter une fraction  $c = \frac{D}{S_{t^*}}$  d'action pour chaque action détenue (et donnant droit au versement de  $D$ ) donc avant  $t^*$ , une action est détenue et donc  $\Pi_t = S_t$  pour  $t < t^*$ , alors qu'à  $t^*$  et après, il y a  $(1 + c)$  actions détenues, et donc

$$\Pi_t = S_t(1 + c) \quad (t \geq t^*) \quad (\text{A.9})$$

d'où  $S_t = \frac{1}{1+c} \Pi_t$  et en particulier

$$\begin{aligned} S_{t^*} &= \frac{1}{1+c} \Pi_{t^*} = \frac{1}{1+c} \Pi_{t^*-\delta t} u^\pm = \frac{1}{1+c} S_{t^*-\delta t} u^\pm \\ &= \frac{1}{1 + \frac{D}{S_{t^*}}} S_{t^*-\delta t} u^\pm \end{aligned}$$

qui, après calcul, donne simplement

$$S_{t^*} = S_{t^* - \delta t} u^\pm - D$$

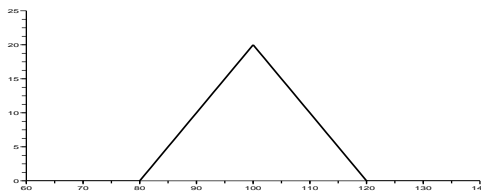
alors que pour  $t > t^*$ , (A.9) redonne

$$S_t = S_{t - \delta t} u^\pm \text{ pour } t > t^*, \text{ comme pour } t < t^*.$$

1. Que peut-on dire des trajectoires de  $\Pi$  ?
2. Définir une fonction  $S(n, j1, j2)$ , où  $j1$  représente le nombre de  $up$  ayant lieu pour  $t \leq t^*$  et  $j2$  représente le nombre de  $up$  ayant lieu pour  $t > t^*$ , en posant  $t^* = N_1 \delta t$ , avec  $N_1=6$  et  $D = (0.1)S_0$  (ce qui signifie que le CA a décidé de verser un dividende égal à 10% de la valeur de l'action à la date  $t = 0$ ). Vous stockerez ses valeurs dans un hypermatrice  $SS(0+1 : N+1, 0+1 : 1+N_1, 0+1 : 1 : (N-N_1)+1)$ .
3. Expérimentez pour déterminer la plus grande valeur de  $N_1$  acceptée par Scilab avec  $N=2*N_1$ . Observez qu'on n'utilise que les éléments  $SS(n+1, j1+1, 0+1)$  pour  $0 \leq j1 \leq n \leq N_1$  et  $SS(n+1, j1+1, j2+1)$  pour  $0 \leq j2 \leq n-j1$  et  $0 \leq j1 \leq N_1$ . L'hypermatrice  $SS$  est donc très creuse : essayez de la déclarer en `spars` ; cela permet-il d'utiliser une plus grande valeur de  $N_1$  ?
4. Tracer les trajectoires de  $S$ .
5. Calculer et tracer les prix d'options call et put européennes, pour  $K=S_0$ . On commencera par calculer le vecteur `CallAuPaiementDiv(0+1 : N1+1)` des valeurs du Call à l'instant  $t^* = N_1 * \text{delta}_t$ , lorsque  $S_{t^*} = S(N_1, j1)$ .
6. Calculez les prix des options call et put américaines, pour  $K=S_0$ . Qu'observez-vous pour le prix du Call américain ?

## A.11 Examen 2006-2007

On appelle *butterfly*  $BTF := B(T, K1, K2, K3)$  sur l'actif  $S$  de date d'exercice  $T$  un contrat payant à la date  $T$  le payoff  $\varphi(S_T)$ , affine par morceaux, nul en dehors de  $[K1, K3]$ , maximal en  $K2 \in ]K1, K3[$  du type suivant



Payoff d'un butterfly  $B(T, 80, 100, 120)$  :

1. Montrer qu'on peut réaliser un butterfly  $B(T, K1, K2, K3)$  en prenant une combinaison simple de Call de même date d'exercice et de valeur d'exercice (strike) respective  $K1$ ,  $K2$ , et  $K3$ . Indication : représenter le payoff relatif à la détention d'un Call de strike  $K1$  et la vente (à découvert) de deux Call de strike  $K2$ , ce qu'on peut noter  $1 * C^{K1} - 2 * C^{K2}$ .
2. Définir le payoff, comme sur la figure ci-dessus (on supposera dorénavant que  $K1$ ,  $K2$ , et  $K3$  sont comme sur la figure) par une fonction Scilab, puis tracer son graphe.
3. On considère un modèle de Cox-Ross-Rubinstein d'actif  $S_t$  défini sur  $[0..T]_{\delta t}$ . On suppose que  $T = 1$ ,  $\delta t = T/N$  avec  $N = 60$ ,  $S_0 = 120$ ,  $\sigma = 0.3$ , le taux continu vaut  $r = 0.05$ . Pour  $t \in [0..T]_{\delta t}$  on note  $BTF_t$  la valeur, dans ce modèle, à la date  $t$ , du butterfly  $BTF$ . Calculer  $BTF_0$ .
4. Pour  $n = 0..N$ , calculer les valeurs de  $BTF_{n\delta t}$  en fonction des valeurs de  $S_{n\delta t}$ . Représentez ces diverses courbes sur un même dessin.  
**Rappel** : la commande Scilab `plot2d(AA(1 :M), BB(1 :M), [xmin,ymin,xmax,ymax])` représente la ligne polygonale joignant les  $M$  premiers points dont les abscisses et ordonnées sont les premières composantes des vecteurs `AA` et `BB`, et qui sont dans le rectangle caractérisé par `[xmin,ymin,xmax,ymax]`.
5. On souhaite couvrir 10.000 contrats butterfly  $B(1, 80, 100, 120)$ . Combien de sous-jacents  $S_0$  doit-on acquérir ?
6. On considère à présent un contrat butterfly  $B^a(T, K1, K2, K3)$  de type américain (il donne droit au payoff à un instant quelconque  $t \leq T$ ) ; on note  $BTF_t^a$  son prix à chaque instant  $t$ . Calculer la prime  $BTF_0^a$  du butterfly américain  $B^a(1, 80, 100, 120)$ . Que remarquez-vous ? Dans ce cas, combien de sous-jacents  $S_0$  doit-on acquérir pour commencer à couvrir 10.000 contrat de ce butterfly américain  $B^a(1, 80, 100, 120)$  ?

7. Un investisseur place 10.000 euros au taux EURIBOR-1Y (taux à un an). On suppose que ce taux suit un modèle de Ho et Lee (avec un pas de temps égal à un an). Pour une probabilité risque-neutre  $\pi = 0.5$  on suppose que  $\delta = 1.01$ . Le taux EURIBOR actuel (moment du placement) est de  $r = 0.044$ . On suppose que la courbe actuelle des taux sur 15 ans correspond à un taux constant, égale au taux en vigueur.  
Quels sont, dans ce modèle, les intérêts qui pourraient être versés à l'investisseur après un an et après deux ans ?
8. L'investisseur souhaite se garantir, pendant 15 ans, un flux d'intérêts annuels au moins égaux au taux à la souscription. Comment s'appelle le contrat garantissant cela ? Notons  $F_r^{15}$  son prix.
9. Quel est, dans le modèle considéré, le prix  $F_r^{15}$  de ce contrat ?
10. Représenter la courbe des prix  $F_{r+m\delta r}^{15}$  pour  $\delta r = 0.001$  et  $m = -20.. + 20$ .



# Bibliographie

- [1] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial calculus*. Cambridge University Press, 1999.
- [2] Thomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004.
- [3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.
- [4] Nicolas Bouleau. *Martingales et marchés financiers*. Editions Odile Jacob, 1998.
- [5] John Cox, Stephen Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.
- [6] Rose-Anne Dana and Monique Jeanblanc-Piqué. *Marchés financiers en temps continu*. Economica, 1998.
- [7] John Hull. *Options, Futures, and other derivatives*. Prentice-Hall, 1997.
- [8] Jean Jacod and Philip Protter. *L'essentiel en théorie des probabilités*. Cassini, 2003.
- [9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Application of Mathematics, stochastic modelling and applied probability*. Springer, 1998.
- [10] Damien Lambertson and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, volume 9 of *Mathématiques et applications*. Ellipse, 1993.
- [11] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in Financial modelling*, volume 36 of *Applications of mathematics*. Springer, 1997.
- [12] Stanley R. Pliska. *Introduction to mathematical finance, discrete time models*. Blackwell publishers, 1997.
- [13] Albert N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*, volume 3 of *Advanced series on statistical science and applied probability*. World scientific, 1999.
- [14] Paul Wilmott. *Derivatives*. John Wiley and sons, 1998.
- [15] Paul Wilmott, Sam Howison, and Jeff Dewynne. *The mathematics of financial derivatives*. Cambridge University Press, 1995.