Cours 1 : Introduction aux Equations différentielles en dimension 1

Lorsqu'on s'intéresse à modéliser une quantité qui évolue au cours du temps et qu'il est naturel de postuler une relation entre cette quantité et sa dérivée, on propose une *équation différentielle*. C'est l'exemple le plus simple de *système dynamique*. Nous allons voir ici ce qu'est une équation différentielle, dans le cas unidimentionel pour commencer, et comment on peut les etudier.

1 Définitions et premiers exemples

Considérons une quantité $y(t)$ (taille d'une population, concentration d'une substance, ...) qui évolue au cours du temps et sa dérivée $y'(t)$ (lorsqu'il est raisonnable de supposer que cette dérivée existe). Supposons qu'on soit conduit à postuler une relation entre cette quantité et sa dérivée de la forme

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

pour une fonction f particulière. Cette relation est une *équation différentielle du premier ordre*[1] et la résolution d'une telle équation consiste à trouver toutes les fonctions $y(t)$ inconnues qui satisfont cette équation.

Exemple : Le *modèle exponentiel*, très rudimentaire, a été proposé pour représenter la croissance d'une population par Thomas Malthus en 1798. Il suppose que la population possède un taux de reproduction r constant, simple différence du taux de natalité et du taux de mortalité (la population est supposée isolée c'est-à-dire qu'aucune migration n'est envisagée). Si $y(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t et $y'(t)$ sa dérivée, la formule $y'(t) = ry(t)$ signifie que le taux de croissance $\frac{y(t+\delta t)-y(t)}{\delta t}$entre les instants t et $t + \delta t$ est proportionnel à $y(t)$ et surtout que le coefficient de proportionnalité r ne varie pas au cours du temps. On peut résoudre cette équation : sa solution est donnée par $y(t) = y(0)e^{rt}$ où $y(0)$ désigne la taille de la population à l'instant $t = 0$ qu'on appelle *condition initiale*. Ce modèle correspond donc à une *croissance exponentielle* de la population lorsque $r > 0$ d'où son nom de *modèle exponentiel* souvent utilisé à la place de *modèle malthusien*. Notons qu'il peut s'agir aussi d'une décroissance exponentielle si r est négatif.

A noter que l'équation différentielle $y'(t) = ry(t)$ est définie par la fonction $f(y) = ry$ qui est une fonction linéaire. L'ensemble de ses solutions s'écrit $\{y(t) = y(0)e^{rt},\ y(0) \in \mathbb{R}\}$ et comporte donc une infinité de solutions différentes, autant que de valeurs possibles pour la *condition initiale* $y(0)$.

Exemple : L'idée du *modèle logistique*, introduit par Verhulst en 1836, est la suivante. Si la population pouvait croître indéfiniment, sans rencontrer aucune limitation de ressource ou d'espace, elle aurait une *croissance exponentielle*. Mais une croissance exponentielle n'est pas adaptée aux populations que l'on observe le plus souvent à l'exception peut-être d'une période initiale où la taille de la population est encore petite, car elle ne tient pas compte des limitations environnementales qui, de fait, ralentissent la croissance lorsqu'on s'approche de la taille *normale* de la population qu'on appelle sa *capacité biotique* K. D'où l'idée de remplacer le taux constant r par un taux variable $r(1 - \frac{y(t)}{K})$ qui dépend de la taille de la population. Ce coefficient $1 - \frac{y}{K}$ reste proche de 1 lorsque la taille de la population est très petite, ce qui explique le début de croissance exonentielle, puis il diminue jusqu'à tendre vers 0 lorsque la taille de la population augmente et tend vers la capacité biotique. L'équation logistique est $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$.

En fait le coefficient $r(1 - y/K)$représente la *part de la capacité biotique encore disponible à* chaque instant t. Plus cette part s'amenuise et plus la croissance se ralentit.

L'*équation différentielle logistique*, $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$ est définie par la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ qui est un polynôme de degré deux. L'ensemble de ses solutions s'écrit[2] $\{y(t) = \frac{y(0)K}{y(0)+(K-y(0))e^{-rt}},\ y(0) \in \mathbb{R}\}$. Il y en a aussi une infinité.

1. Les équations différentielles du 2e ordre font intervenir non seulement la fonction y et sa dérivée y' mais aussi sa dérivée seconde y'' et les équations d'ordre n font intervenir les dérivées de la fonction jusqu'à l'ordre n.

2. L'équation peut se réécrire $\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$, soit peut se réécrire $\frac{1}{y(t)\left(1-\frac{y(t)}{K}\right)}dy(t) = rdt$ Mais comme on a l'égalité $\frac{1}{y(1-\frac{y}{K})} = \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{N}{K}}$, l'équation devient $\frac{dy(t)}{y(t)} + \frac{\frac{1}{K}dy(t)}{1-\frac{y(t)}{K}} = rdt$ d'où, en intégrant, $\ln y(t) - \ln(1 - \frac{y(t)}{K}) = rt + C^{ste}$ soit encore en prenant l'exponentielle $\frac{y(t)}{1-\frac{y(t)}{K}} = e^{rt}e^{C^{ste}}$. Il est facile de vérifier que la constante d'intégration vaut ici $C^{ste} = \ln\left(\frac{y(0)K}{K-y(0)}\right)$. D'où, après simplifications, la solution $y(t) = \frac{y(0)K}{y(0)+e^{-rt}(K-y(0))}$.

Exemple : Lorsque l'équation différentielle est de la forme $\frac{dy(t)}{dt} = a(t)y(t) + b(t)$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions données, on dit que l'équation différentielle est *linéaire*. C'est le cas du modèle exponentiel pour lequel $a(t) = r$ et $b(t) = 0$ (a et b sont des fonctions constantes) mais ce n'est pas le cas du modèle logistique. Les équations linéaires peuvent être *résolues explicitement*, c'est-à-dire qu'on peut écrire de façon explicite l'ensemble de leurs solutions (que l'on appelle encore *la solution générale*). Tout d'abord, si $b(t) = 0$, $y(t) = y(0)e^{\int_0^t a(t)dt}$. Plus généralement,lorsque $b(t) \neq 0$, on doit d'abord rechercher une *solution particulière* de l'équation, que l'on notera $y^*(t)$, la solution générale s'écrivant alors

$$y(t) = y^*(t) + (y(0) - y^*(0))\, e^{\int_0^t a(t)dt}.$$

Par exemple, on peut vérifier que $y^*(t) = te^{2t}$ est une solution de l'équation $y' = 2y + e^{2t}$ et en déduire que la solution générale de cette équation s'écrit $y(t) = y(0)e^{2t} + te^{2t}$.

Au dela des équations linéaires, il y a un petit nombre d'autres équations différentielles qui peuvent être résolues explicitement. Mais, le plus souvent, les équations différentielles que l'on est amené à utiliser ne peuvent pas être résolues explicitement. On a alors recours au calcul approché, nous verrons comment plus loin, ou bien à l'étude qualitative des solutions, principalement centrée sur l'étude des équilibres de l'équation et de leur stabilité.

2 Etude qualitative :équilibre et stabilité des équilibres

La principale caractéristique du modèle logistique que nous avons étudié est qu'il présente un é*quilibre attractif* vers lequel tendent toutes les solutions du modèle, quelque soit leur condition initiale (sauf si y(0)=0 !). Or l'existence d'équilibres et leurs propriétés (par exemple le fait que les autres solutions tendent vers lui) sont des éléments que l'on peut souvent déduire directement de l'équation différentielle, même si l'on ne sait pas calculer explicitement ses solutions. C'est l'étude du graphe de la fonction f (une droite dans le cas exponentiel et une parabole du cas logistique) qui permet de le faire.

Définition : Pour une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t)), \tag{1}$$

on appelle é*quilibre* ou é*tat stationnaire* une valeur constante y^* de la quantité y telle que si $y(0) = y^*$ alors $y(t) = y^*$ pour tout t (la quantité *reste à l'équilibre*). Un équilibre est donc une solution constante de l'équation différentielle. Une telle solution a nécessairement une dérivée nulle, c'est-à-dire que l'on a $f(y^*) = 0$; en d'autres termes y^* est aussi *un zéro* de la fonction f.

Ainsi dans le modèle exponentiel où $f(y) = ry$, il y a un seul équilibre $y^* = 0$ et dans le modèle logistique où $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$, il y en a deux, $y^* = 0$ et $y^* = K$.

Dans un modèle de type (1), il y a autant d'équilibres différents qu'il y a de zéros différents de la fonction f. On peut donc visualiser les différents équilibres de l'équation en traçant le graphe de la fonction f. Les équilibres sont les abscisses des points d'intersection du graphe avec l'axe horizontal (qui est ici l'axe des y). Et ce graphe permet en outre de visualiser, sur son axe horizontal, un schéma de la dynamique : il suffit de mettre une flèche dans le sens des y croissants sur les segments de l'axe où $f > 0$ (c'est-à-dire où le graphe de f est au dessus de l'axe) et une flèche dans le sens des y décroissants sur les segments de l'axe où $f < 0$. Parfois ce schéma de la dynamique est suffisant et peut remplacer à lui seul une résolution de l'équation (qui, de toute façon, est bien souvent impossible).

Définition : On dit qu'un équilibre y^* pour lequelle on a $f'(y^*) < 0$ est un é*quilibre stable* car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre y^* est de s'en rapprocher. De façon analogue, on dit qu'un équilibre y^* pour lequelle on a $f'(y^*) > 0$ est un é*quilibre instable* car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre y^* est de s'en éloigner.

On peut vérifier en appliquant ce critère que l'unique équilibre du modèle exponentiel est stable lorsque $r < 0$ (extinction) et instable lorque $r > 0$ (explosion) et de même, si l'on suppose $r > 0$, on peut vérifier que l'équilibre $y^* = K(> 0)$ du modèle logistique est un équilibre stable (capacité biotique) alors que $y^* = 0$ est un équilibre instable.

Lorsque $f'(y^*) = 0$, on ne peut pas savoir à partir de f' si l'équilibre est stable, instable ou ni l'un ni l'autre.

La condition $f'(y^*) < 0$ (resp. $f'(y^*) > 0$) est donc *un critère de stabilité* (resp. *d'instabilité*) qui se révèle très opérationnel puisqu'il se calcule facilement. Pour rendre ce critère intuitif, on se reportera à nouveau au schéma de la dynamique obtenu à partir du graphe de f. On y voit que lorsque $f'(y^*) < 0$ le graphe de f passe au point y^* de valeurs positives à des valeurs négatives et donc que la population croît tant qu'elle est plus petite que y^* (puisque $f'(y) > 0$) et décroit tant qu'elle est plus grande. Elle tend donc dans tous les cas à se rapprocher de l'équilibre. On fait le même raisonnement, inversé cette fois, dans le cas où $f'(y^*) > 0$.

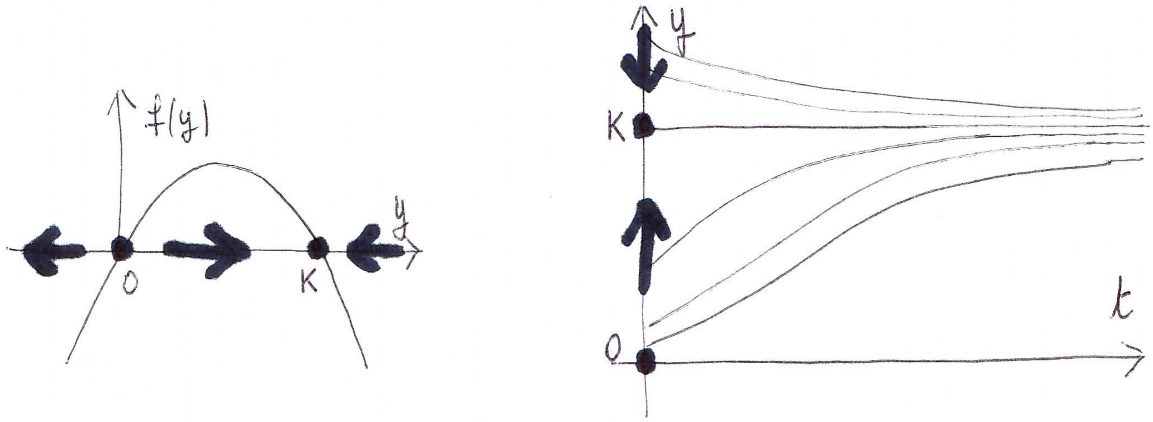

Figure 1 – Graphe de la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ dans le plan (y, y') et esquisse des solutions de l'équation différentielle $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$ dans le plan (t, y). Sur l'axe des y, les points représentent les équilibres et les flèches indiquent le sens de variation des solutions (croissantes si $y' > 0$ et décroissantes si $y' < 0$).

La figure ci dessus montre que pour une équation différentielle telle que (1), la détermination des équilibres et du sens de variation des solutions suffit bien souvent pour *tracer l'esquisse des solutions de l'équation.* C'est ce qu'on appelle l'étude qualitative. Notons que cette esquisse en dit souvent plus sur le comportement des solutions que l'expression explicite de la solution générale (lorsqu'elle peut être calculée) car son l'expression, éventuellement compliquée, se révèle souvent bien peu parlante.

Exercice 1. **:** Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 3e^{-t}$.

1. Trouver une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{-t}$.
2. En déduire la solution générale de l'équation.
3. Trouver la solution particulière de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Calculer sa valeur en $t = \frac{1}{10}$.

Exercice 2. **:** En théorie de l'apprentissage, les psychologues utilisent des courbes de performance $P(t)$ qui indiquent le niveau atteint à l'instant t par une personne qui acquiert une compétence. La dérivée $\frac{dP(t)}{dt}$ de $P(t)$, qui indique la vitesse d'acquisition de cette compétence, est supposée proportionelle à l'écart $M - P(t)$, où M est le niveau maximal atteignable par la personne (cela signifie qu'au début de l'apprentissage, celui-ci est rapide puis, à mesure que la personne approche du niveau maximal, sa vitesse d'acquisition diminue). On a donc pour $P(t)$ une équation différentielle de la forme

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(M - P(t))$$

où $k > 0$ est une constante. Cette équation différentielle est-elle une équation linéaire ? Pourquoi ? La résoudre et indiquer l'allure d'une courbe de performance $P(t)$ (en choisissant une valeur raisonnable pour $P(0)$).

Exercice 3. **:** On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation, indiquer le comportement de cette population à l'avenir, selon ce modèle (croissance, décroissance ?).
2. Vérifier que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est une solution de cette équation. Quelle est sa valeur initiale ?
3. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :
$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$
Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définie cette équation et, en vous servant du signe de cette fonction, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.

Exercice 4. **:**

1. Montrer que l'équation différentielle
$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 5\cos t$$
possède une solution particulière de la forme $\hat{y}(t) = A\cos t + B\sin t$ puis l'utiliser pour résoudre l'équation différentielle.
2. Indiquer l'allure des graphes des solutions de l'équation sur la figure ci-dessous et décrire leur comportement lorsque t tend vers l'infini. On appelle parfois la solution $\hat{y}(t)$ un é*quilibre dynamique*.
3. Une fonction de la forme $\hat{y}(t) = A\cos t + B\sin t$ pourrait-elle, à votre avis, être solution d'une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$, c'est-à-dire une équation où f ne dépend pas de t ? Expliquez pourquoi.