

Cours 2 : Existence, unicité et calcul approché des solutions

Le théorème fondamental de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles sous des conditions très peu contraignantes. On ne démontrera pas ici ce théorème car la preuve peut être facilement trouvée dans tous les ouvrages consacrés aux Equations Différentielles ou, par exemple, dans Wikipedia. Comme son nom l'indique, ce théorème a d'abord été montré par Cauchy (en 1844) puis généralisé par Lipschitz peu après.

Enoncé du théorème

On rappelle qu'une fonction $y \mapsto f(y)$ est dite *continuellement dérivable* ou *de classe C^1* dans un domaine $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ si elle est dérivable sur \mathcal{D} et si sa dérivée est continue. En fait, toutes les fonctions usuelles, polynôme, fraction rationnelle, exponentielle, logarithme, fonction trigonométrique, etc...sont continuellement dérivables sur leur domaine de définition.

Théorème 1 (Théorème d'existence et d'unicité) Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ et

$$y' = f(y)$$

l'équation différentielle associée. Si la fonction f est continuellement dérivable alors, pour tout $y_0 \in \mathcal{D}$ et tout instant réel $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une unique solution $y(t)$ de l'équation différentielle définie sur I et vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Si l'on attache son attention aux graphes des solutions, représentés dans un plan (t, y) , le théorème précédent affirme que par tout point (t_0, y_0) passe une unique courbe $(t, y(t))$ qui est le graphe d'une solution de l'équation différentielle et qui est définie sur un intervalle I qui contient l'instant initial t_0 . Le graphe d'une solution s'appelle aussi une *trajectoire* de l'équation différentielle.

Ce théorème garantissant l'unicité de la solution correspondant à une condition initiale y_0 donnée, on peut donc de parler de *la* solution de condition initiale y_0 . Autrement dit, à deux conditions initiales différentes correspondent forcément deux solutions différentes pour toutes les valeurs antérieures et postérieures de t . Géométriquement, cela signifie que deux trajectoires partant de deux points initiaux différents ne peuvent ni se couper ni même se toucher.

Cas non autonome

Le théorème précédent se généralise au cas des équations différentielles dépendant du temps qu'on appelle *équation différentielle non autonome*, $y' = f(t, y)$. Dans ce cas, on demande seulement à f d'être une fonction continue sur son domaine comme fonction des deux variables t et y et d'être continuellement dérivable comme fonction de y uniquement. Le point initial (t_0, y_0) doit en outre appartenir au domaine de définition de f .

On verra plus loin qu'en fait ce théorème reste vrai aussi lorsque $y \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire dans le cas de systèmes de n équations différentielles.

Durée de vie/explosion

On remarquera que le théorème précédent n'affirme rien sur la taille de l'intervalle d'existence d'une solution qui peut donc être petit : c'est la raison pour laquelle on parle de *solution locale* et de théorème d'existence et d'unicité *local*.

Le fait que les solutions pourraient cesser d'exister au delà d'un certain intervalle de temps I est lié au *phénomène d'explosion* qui est bien illustré par l'exemple suivant. Considérons la solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ de condition initiale $y(0) = 10$. Il est facile de voir qu'elle vaut $y(t) = \frac{1}{0,1-t}$ et qu'elle n'est donc pas définie au delà de $t = 0,1$ car elle présente une asymptote verticale en ce point. Et ce sera vrai aussi pour n'importe quelle autre solution de condition initiale y_0 qui ne sera pas définie au delà de l'instant $t = 1/y_0$. Ce phénomène d'explosion est la signature d'un comportement non linéaire car on peut montrer facilement (en examinant la forme de la solution explicite par exemple) que pour une équation différentielle linéaire $y' = a(t)y + b(t)$, si les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont définies pour tout t , alors l'intervalle I peut être choisi égal à \mathbb{R} tout entier. En général, on choisit pour I le plus grand intervalle possible (avant explosion). Par exemple l'intervalle $] -\infty, 1/y_0[$ dans le cas des solutions de l'équation $y' = y^2$ de condition initiale $y(0) = y_0$. La solution s'appelle alors une *solution maximale*.

Dépendance par rapport à la condition initiale et à un paramètre

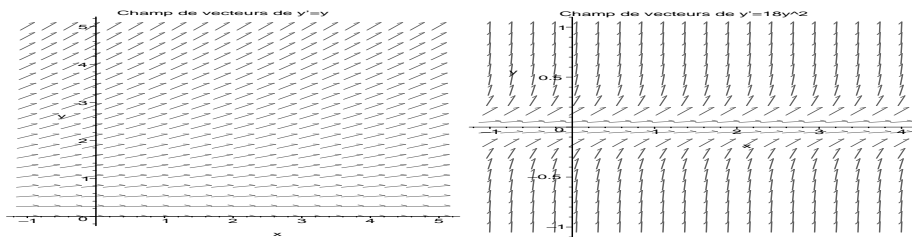
Comme chaque solution $y(t)$ est caractérisée par sa condition initiale (t_0, y_0) , on peut considérer la solution comme une fonction de la condition initiale également $y(t, t_0, y_0)$. A t_0 et t fixés dans I , l'application $y_0 \mapsto y(t, t_0, y_0)$ est bien définie d'après le théorème précédent, et on peut montrer qu'elle est continuellement dérivable. En d'autres termes, la valeur à l'instant t d'une solution $y(t)$ est donc une fonction très régulière de sa valeur à l'instant t_0 .

Lorsque l'équation différentielle dépend d'un paramètre a , c'est-à-dire lorsque $f(y, a)$ est une fonction d'un paramètre, comme c'est le cas de l'équation linéaire $y' = ry$ ou de l'équation logistique $y' = ry(1 - y/K)$ qui dépendent des paramètres r et K , on peut aussi voir de quelle façon la solution $y(t)$, correspondant à une condition initiale fixée (t_0, y_0) , va dépendre de ce (ou ces) paramètres. On peut s'assurer que, lorsque la fonction $a \mapsto f(y, a)$ est continuellement dérivable alors la solution $a \mapsto y(t, a)$ le sera également.

Déterminisme et chaos

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'un phénomène régi par une équation différentielle est parfaitement (et uniquement) déterminé dès que l'on connaît sa condition initiale. Ce *déterminisme*, qui est en fait la capacité du modèle à *prévoir*, prévalait à l'époque de Cauchy et de ses successeurs qui pensaient que la seule limite que l'on avait à pouvoir tout prédire était l'éventuelle incapacité dans laquelle on était temporairement de connaître les équations différentielles régissant les lois de la nature. C'est Poincaré qui, un peu plus tard, a remis en cause ce paradigme à l'occasion de son étude du système solaire. Il écrivait : "Une cause très petite, qui nous échappe, détermine parfois un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à tout instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finals ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit". Le théorème de Cauchy-Lipschitz indique bien qu'une prévision parfaite est possible, mais uniquement sous réserve de connaître parfaitement la condition initiale. Mais certains systèmes dynamiques sont rapidement imprévisibles pour la raison qu'indique Poincaré. On utilise alors le terme de *chaos* pour décrire cette situation.

Champs de vecteurs



Bien qu'il soit très rare que l'on puisse résoudre explicitement une équation différentielle donnée, on peut souvent avoir une idée de l'allure des graphes des solutions en observant le *champs de vecteurs associé*. En effet le graphe d'une solution de l'équation $y' = f(y)$ est par définition tangent à son vecteur *vitesse* $(1, y'(t))$ et donc au vecteur $(1, f(y))$. La connaissance de la fonction f en chaque point y permet donc de représenter facilement ces vecteurs tangents même si l'on ne connaît pas les solutions. Et si l'on en trace un grand nombre, uniformément répartis dans le plan (t, y) , on obtient une représentation du *champ de vecteurs associé à l'équation différentielle* qui permet souvent de deviner les graphes des solutions puisqu'il s'agit des courbes qui sont tangentes en tous leurs points aux vecteurs de ce champs de vecteurs.

L'idée de la principale méthodes numériques de calcul de solutions approchées, la méthode d'Euler, est construite sur l'existence de ce champs de vecteurs.

Solutions numériques approchées

La toute première méthode numérique permettant de calculer une solution approchée d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$, étant donnée une condition initiale (t_0, y_0) , a été trouvée par Leonard Euler en 1768. Elle a été améliorée de façon décisive par deux mathématiciens allemands, Runge et Kutta en 1901. C'est la méthode de Runge-Kutta du 4e ordre qui est la plus utilisée aujourd'hui mais il y en a bien d'autres comme la méthode *prédicteur-correcteur* d'Adams qui est le choix par défaut de Scilab.

Toutes ces méthodes fournissent une suite de points (t_n, y_n) issue du point donné (t_0, y_0) , qu'on peut aussi voir comme une fonction linéaire par morceaux en reliant les points entre eux par des segments et qui fournit une approximation de la solution exacte $y(t)$ (solution dont on s'est assuré de l'existence et de l'unicité). Cette approximation ne fournit pas la solution exacte et elle comporte donc une erreur; l'analyse numérique est la branche des mathématiques qui étudie les méthodes de calcul approché comme celles d'Euler ou de Runge-Kutta, pour tenter de les améliorer mais surtout pour en prévoir et en maîtriser les erreurs.

Méthode d'Euler

Soit $y(t)$ la valeur à l'instant $t > t_0$ de la solution telle que $y(t_0) = y_0$. On choisit un *pas d'intégration* h , que l'on prendra ici égal à $(t - t_0)/n$ pour un entier n assez grand, et on pose, pour tout $i = 0, \dots, n - 1$

$$\begin{cases} t_{i+1} &= t_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i) \end{cases} \quad (1)$$

Cette formule est ce que l'on appelle un *algorithme* : elle permet de calculer, étant donné la condition initiale (t_0, y_0) , la suite des points (t_i, y_i) de proche en proche jusqu'au point $(t = t_n = t_0 + nh, y_n)$, la quantité y_n étant la valeur approchée cherchée de la solution exacte $y(t)$.

L'idée géométrique de la méthode d'Euler est très simple. Partons du point initial (t_0, y_0) dans le plan (t, y) . La solution issue de ce point n'est pas connue mais le champs de vecteurs se déduit immédiatement de l'équation différentielle; en d'autres termes, on connaît la tangente à la solution en ce point. On prend alors simplement comme approximation de la solution jusqu'à l'instant suivant $t_1 = t_0 + h$ sa tangente en ce point. Si h n'est pas trop grand, l'erreur ne le sera pas trop non plus. Cette tangente a pour équation

$$y = f(t_0, y_0)t + C^{ste}$$

puisque $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ et on vérifie aisément que sa valeur en $t_1 = t_0 + h$ vaut $f(t_0, y_0)h + y_0$.

Evaluation de l'erreur Pour évaluer l'erreur commise lorsqu'on remplace la solution exacte $y(t)$ par sa valeur obtenue par la méthode d'Euler, il convient d'estimer tout d'abord l'erreur faite après *un* pas, erreur qu'on appelle *erreur locale*. On verra ensuite que, comme les erreurs commises à chaque pas peuvent s'accumuler lorsqu'on répète ce calcul un grand nombre de fois, elles forment ce que l'on appelle l'*erreur globale*.

En utilisant la valeur en $t = t_1$ du développement de Taylor de la solution exacte $y(t)$ au point initial t_0 (si l'on suppose que la solution est une fonction deux fois continûment dérivable)

$$y(t_1) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2}y''(t_0) + o(h^2),$$

on voit que les deux premiers terme de ce développement sont précisément la valeur choisie pour y_1 . On a donc

$$y(t_1) = y_1 + \frac{h^2}{2}y''(t_0) + o(h^2).$$

On voit donc que l'erreur commise *sur un seul pas*, $y(t_1) - y_1$, est une quantité qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0 comme h^2 . En d'autres termes, si l'on divise par dix le pas d'intégration h l'erreur est alors divisée par cent (si h est assez petit).

Mais comme on fait des erreurs du même ordre à chaque pas, on peut montrer par un calcul semblable que l'*erreur globale*, celle qui sera commise un fois parvenue au point t , est une erreur d'ordre h et non plus d'ordre h^2 : c'est intuitif si l'on observe que s'il y a n pas et si $t - t_0 = 1$ par exemple, on accumulera $n = 1/h$ erreurs de taille de l'ordre de grandeur de h^2 .

Finalement, on montre que l'erreur à l'instant t vaut $y_n - y(t_0 + nh) = o(h)$. C'est pourquoi on dit que la méthode d'Euler est une *méthode d'ordre 1*.

Méthode RK2 ou méthode du point milieu

C'est une astuce très simple qui permet d'améliorer la méthode d'Euler pour obtenir une méthode, presque aussi simple, mais qui soit cette fois d'ordre (global) 2 (c'est-à-dire dont l'erreur tend vers zéro comme le carré du pas h). Voici l'algorithme de la méthode du point milieu :

$$\begin{cases} t_{i+1} &= t_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \end{cases} \quad (2)$$

où, à chaque pas, k_1 désigne $k_1 = hf(t_i, y_i)$.

Cette méthode porte le nom de *méthode du point milieu* car elle consiste à prendre comme pente de la droite entre t_i et t_{i+1} non pas la pente du champs de vecteurs au point (t_i, y_i) comme dans le cas de la méthode d'Euler mais la pente du champs de vecteurs au point situé au milieu du segment joignant (t_i, y_i) et $(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))$ d'Euler. Cela conduit à prendre une *valeur intermédiaire* entre les pentes aux deux extrémités, rapprochant ainsi le segment de la solution exacte.

On peut montrer que cette astuce permet de diminuer l'erreur commise car elle élimine le terme en h^2 de l'erreur locale, celle-ci devenant alors une erreur locale en h^3 . Par contre cette méthode augmente sensiblement le temps de calcul puisqu'il faut, à chaque pas, évaluer le champs non seulement à l'origine (t, y) du mais au point $(t + h/2, y + k_1/2)$ situé au milieu du segment utilisé par la méthode d'Euler.

Méthode Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode précédente s'appelle aussi la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) car elle a été inventée par ces deux auteurs qui ont proposé une famille de méthodes de complexité de plus en plus grande qui permettent d'obtenir une approximation des solutions d'ordre d pour tout entier $d \geq 1$, c'est-à-dire avec une erreur globale en h^d . Les méthodes RK1 et RK2 ne sont autres que la méthode d'Euler et la méthode du point milieu. En général, dans les applications on n'utilise que rarement les deux méthodes précédentes car elles produisent des erreurs trop grandes. La méthode RK4 est par contre très populaire car elle correspond à un bon compromis entre complications de programmation et augmentation du temps de calcul d'une part et taille de l'erreur commise d'autre part.

Voici les formules pour la méthode RK4 :

$$\begin{cases} t_{i+1} &= t_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \quad (3)$$

où, à chaque pas (t_i, y_i) ,

$$\begin{cases} k_1 &= hf(t_i, y_i) \\ k_2 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(t_i + h, y_i + k_3) \end{cases} \quad (4)$$

A noter que malgré la qualité de cet algorithme, l'utilisateur ne doit jamais perdre de vue qu'il ne s'agit que d'une approximation de la solution et qu'il existe bien de cas où elle pourrait se révéler très éloignée de la solution exacte. L'idéal est de compléter chaque fois qu'on le peut, le calcul numérique approché par une étude qualitative qui permet de contrôler la validité de l'approximation fournie par la méthode numérique.