

Cours 3 : Noeuds, cols, foyers et centres

Jusqu'ici nous avons étudié des équations différentielles comme modèles pour la dynamique d'une quantité unique évoluant au cours du temps. A présent nous allons étudier des systèmes de deux équations différentielles modélisant la dynamique de deux quantités (par exemple les effectifs de deux populations) évoluant avec le temps en interaction l'une avec l'autre.

Systèmes de deux équations différentielles

On considère le système de deux équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où f et g sont deux fonctions que l'on supposera *lisses* (c'est-à-dire continûment dérivables).

On appelle *solution* du système (??) un vecteur $(x(t), y(t))$ dont les deux coordonnées sont des fonctions du temps qui *vérifient* le système différentiel, c'est-à-dire telles que l'on a $x'(t) = f(x(t), y(t))$ et aussi $y'(t) = g(x(t), y(t))$. On appelle *condition initiale* la valeur de la solution à l'instant initial (que l'on choisit souvent égal à 0), c'est-à-dire le vecteur $(x(0), y(0))$.

Par exemple pour le système différentiel suivant, appelé *oscillateur harmonique*,

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases} \quad (2)$$

on peut vérifier facilement que, pour toutes les valeurs de $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, le vecteur $(x(t), y(t)) = (r \cos(t - \theta), r \sin(t - \theta))$ est une solution du système et aussi que la solution la condition initiale $(2, 0)$ est $(x(t), y(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t)$.

Comme pour les équations différentielles uniques, on peut rarement calculer les solutions exactes d'un tel système différentiel. Mais, comme pour les équations différentielles, on peut montrer que pour assurer l'existence et l'unicité des solutions du système, étant donnée une condition initiale $(x(0), y(0))$, il suffit que les fonctions f et g qui définissent l'équation soient lisses. On peut donc, à défaut de savoir calculer des solutions exactes, chercher à décrire le comportement des solutions soit par une *étude qualitative*, soit en calculant des solutions approchées (ou, mieux encore, lorsque c'est possible, en combinant les deux approches).

Trajectoires et champs de vecteurs

On peut représenter géométriquement les solutions du système différentiel de deux façons différentes : soit on trace les graphes de chacune des deux composantes de la solution comme des fonctions du temps, soit on trace la courbe image de $t \rightarrow (x(t), y(t))$ qui est une *courbe paramétrée* dans le plan (x, y) qu'on appelle une *trajectoire* du système.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, les trajectoires sont des cercles concentriques (pourquoi?). On sait que la "vitesse de déplacement" sur la courbe solution est donnée par le *vecteur vitesse* que l'on peut calculer simplement à l'aide des dérivées des deux composantes de la solution

$$V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

A noter que plus sa longueur $\|V\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ est grande et plus la courbe est parcourue rapidement par la dynamique associée au système.

Bien qu'on ne connaisse pas en général les trajectoires, on connaît néanmoins leurs vecteurs tangent $V(x, y)$ en tout point puisqu'il est donné par le système différentiel $V(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Au système différentiel correspond donc un *champs de vecteurs* dans le plan. Et les courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$ qui sont solutions du système différentiel sont les courbes tangentes en chacun de leurs points au vecteur de coordonnées $(f(x, y), g(x, y))$.

Etude qualitative, isoclines, équilibres

L'*étude qualitative* du système consiste à déterminer, à partir d'un examen du système, un *aperçu du champs de vecteurs* afin d'en déduire *l'allure* des trajectoires.

Pour cela on remarque que si $f(x, y) = 0$ en un point, le vecteur du champs de vecteur sera vertical en ce point, et de même si $g(x, y) = 0$, il sera horizontal. On en déduit que la courbe d'équation $g(x, y) =$

0, appelée *isocline* $y' = 0$, est une courbe sur laquelle les solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ ont une *tangente horizontale*. De même la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, appelée *isocline* $x' = 0$, est une courbe sur laquelle les solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ ont une *tangente verticale*. Les points d'intersections des isoclines sont les *équilibres* (x^*, y^*) du système c'est-à-dire les points tels que la trajectoire issue d'un tel point reste en ce point pour tout t (car si $x'(t)$ et $y'(t)$ sont nuls, $x(t)$ et $y(t)$ sont constants).

Dans chacune des régions du plan délimitées par les isoclines, les quantités $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont de signe constant et on peut donc schématiser la direction du champs de vecteurs par une flèche de l'un des quatre types suivants : vers la droite et vers le haut (si $f > 0$ et $g > 0$), vers la droite et vers le bas (si $f > 0$ et $g < 0$), vers la gauche et vers le haut (si $f < 0$ et $g > 0$), ou vers la gauche et vers le bas (si $f < 0$ et $g < 0$).

La représentation des deux isoclines $y' = 0$ et $x' = 0$, des équilibres (à l'intersection des isoclines) et du schéma des flèches du champs de vecteurs constituent l'*étude qualitative* du système d'où l'on pourra le plus souvent déduire, en utilisant la propriété qu'ont les trajectoires de ne jamais se croiser, l'allure des solutions en fonction de leur condition initiale $(x(0), y(0))$. A noter qu'en raison de l'unicité aucune trajectoire ne traverse un équilibre.

Calcul de solutions approchées

Comme dans le cas d'une équation différentielle unique, la méthode d'Euler permet de calculer une solution approchée $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ passant par un point donné (x_0, y_0) pour un système différentiel. L'idée est ici encore de suivre le champ de vecteur durant un pas de temps h , supposé assez petit, puis de recommencer durant un second pas de temps h , en suivant à nouveau le champ de vecteur au point que l'on a atteint. L'algorithme est le suivant : on définit une suite de points du plan de coordonnées (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , ... par

$$\begin{cases} x_n &= x_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n &= y_{n-1} + hg(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

et on relie ces points entre eux de façon à former une ligne brisée. Si h est suffisamment petit, cette ligne brisée fournit une approximation de la solution exacte. En effet on peut montrer que si $h = (t - t_0)/n$, alors la suite (x_n, y_n) converge, quand n tend vers l'infini, vers la valeur exacte de la solution $(x(t), y(t))$ à l'instant $t \geq t_0$.

On peut aussi vérifier que cet algorithme, comme dans le cas d'une équation différentielle unique, est un algorithme d'ordre 1 (c'est-à-dire que l'erreur tend vers zéro comme le pas h) et qui peut être remplacé par des algorithmes plus performants, notamment des algorithmes d'ordre plus élevé. Parmi les plus utilisés on trouve l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

Nature des équilibres : classification de Poincaré

Henri Poincaré a introduit une classification des champs de vecteurs linéaires du plan qui regroupe ces champs en un nombre fini de classes selon l'aspect géométrique de la famille des trajectoires du champs. Cette classification est très importante car on l'utilise non seulement pour l'étude de champs linéaires mais surtout pour l'étude de champs non linéaires dont on approxime l'allure des trajectoires au voisinage des points d'équilibre par celle des trajectoires du linéarisé du champs comme nous allons le voir ci-dessous.

Un système différentiel (??) est dit *linéaire* lorsque les deux fonctions f et g sont des fonctions linéaires de x et de y . Il s'écrit alors sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

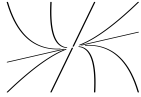
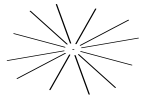


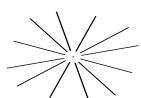


où A est une matrice réelle 2×2 . On supposera que A est *non dégénérée*, c'est-à-dire que 0 n'est pas une valeur propre. On notera λ et μ les deux valeurs propres de A lorsqu'elles sont réelles et on notera $\alpha \pm i\omega$ ces deux valeurs propres lorsqu'elles sont complexes. On sait qu'il existe une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle l'application linéaire associée à A a pour matrice l'une des suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

En notant U et V les coordonnées dans cette base, il est aisé de résoudre le système en U et V : dans le premier cas on a $(U, V) = (e^{\lambda t}U_0, e^{\mu t}V_0)$, dans le second $(U, V) = e^{\lambda t}(U_0 + tV_0, V_0)$ et enfin dans le troisième

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres réelles λ et μ

$0 < \lambda < \mu$		Noeud instable
$0 < \lambda = \mu, A$ diagonalisable		Noeud dégénéré instable
$0 < \lambda = \mu, A$ non diagonalisable		Noeud instable
$\lambda < 0 < \mu$		Col
$\lambda = \mu < 0, A$ diagonalisable		Noeud dégénéré stable
$\lambda = \mu < 0, A$ non diagonalisable		Noeud stable
$\mu < \lambda < 0$		Noeud stable

Valeurs propres complexes ($\alpha \pm i\omega, \omega \neq 0$)






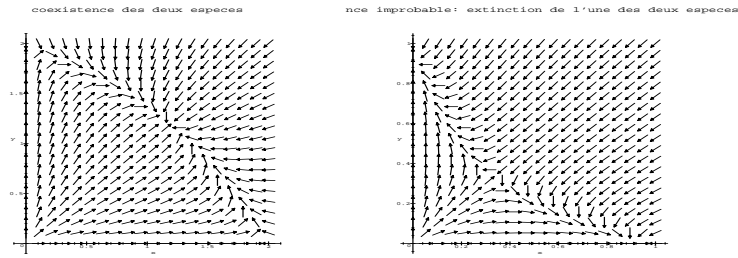
$\alpha > 0$	 ou 	Foyer instable
$\alpha = 0$		Centre
$\alpha < 0$	 ou 	Foyer stable

FIGURE 1 – Classification de Poincaré des systèmes linéaires



Il est dès lors facile d'en déduire le comportement des solutions. La figure ?? indique, selon les valeurs respectives de λ , μ et α , ce comportement ainsi que les noms donnés par Poincaré à ces divers cas.

Linéarisé d'un système différentiel non linéaire

Supposons que (x^*, y^*) soit un équilibre du système différentiel

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

c'est-à-dire un zéro commun de f et g . Soit $\varepsilon > 0$ un très petit paramètre. Effectuer le changement de variables $X := \frac{x-x^*}{\varepsilon}$, $Y := \frac{y-y^*}{\varepsilon}$ revient à regarder à la loupe au voisinage de l'équilibre (x^*, y^*) . En effet, lorsque $x - x^*$ et $y - y^*$ sont très petits, de l'ordre de ε , X et Y sont alors des grandeurs appréciables et donc les dessins obtenus dans le plan (X, Y) correspondent à l'image de points (x, y) très proches de l'équilibre. Après calculs, on constate que le système obtenu sous la loupe peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} X' &= aX + bY + o_1(\varepsilon) \\ Y' &= cX + dY + o_2(\varepsilon) \end{cases} \quad (5)$$

où $o_1(\varepsilon)$ et $o_2(\varepsilon)$ sont des expressions qui contiennent ε en facteur et qui donc tendent vers 0 avec ε . Si l'on néglige ces termes, le système différentiel devient linéaire (cela signifie que quand on regarde à la loupe un système différentiel au voisinage d'un de ses équilibres, on voit un système différentiel pratiquement linéaire), c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La matrice A s'appelle la *matrice jacobienne* du système initial. On peut calculer facilement cette matrice A à partir des dérivées partielles de f et g calculées au point d'équilibre (x^*, y^*) . En effet on a

$$A = A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

On a vu que les équilibres d'une dynamique linéaire sont principalement de 4 types, noeuds, cols, foyers et centres, les noeuds et les foyers se divisant eux-même en deux catégories selon qu'ils sont stables ou instables. Par extension, on dit qu'un équilibre d'un système non linéaire est un noeud, un col, un foyer ou un centre selon le type de son linéarisé. Le type de l'équilibre s'appelle sa *nature*. La connaissance de la nature des équilibres d'une dynamique apporte souvent des renseignements précieux sur le comportement des trajectoires au voisinage des points d'équilibre.

A titre d'exemple, considérons les deux systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' &= (2 - x - 2y/3)x \\ y' &= (2 - 2x/3 - y)y \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x' &= (1 - x - 2y)x \\ y' &= (1 - 2x - y)y \end{cases} \quad (7)$$

dont la figure ci-dessus représente les champs de vecteurs associés. Ces deux exemples présentent chacun 3 équilibres situés sur les axes de coordonnées, $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et un quatrième équilibre de coordonnées $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ dans le premier exemple et de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ dans le second. On détermine la nature de ces équilibres en linéarisant le système au voisinage de chacun de ces équilibres et en calculant, dans chaque cas, les valeurs propres de la matrice A trouvée. On peut ensuite contrôler en vérifiant si la nature trouvée est compatible avec ce que l'on peut voir sur la figure. On établit ainsi que le quatrième équilibre est un noeud stable dans le premier système et un col dans le second.