Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Systèmes Dynamiques

Cours 6 : Systèmes différentiels en dimension n

Nous avons étudié jusqu'ici des équations différentielles et des systèmes de deux équations différentielles pour lesquels nous avons présenté notamment la classification de Poincaré. Cette classification, et plus généralement l'ensemble des méthodes d'étude que nous avons présentées, se généralisent à des systèmes à n équations. Bien entendu en dimension n les dynamiques sont souvent beaucoup plus complexes ce qui rend par exemple une étude qualitative souvent trop difficile. Nous allons voir que cela n'empêche pas néanmoins l'étude de ces systèmes.

Systèmes de n équations

La forme générale d'un système de n équations différentielles à n inconnues, notées $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, est la suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' & = & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ ... & = & .... \\ x_n' & = & f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right. \tag{1}$$

Si l'on désigne par x le vecteur de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et par $f \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la fonction de composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, on peut écrire *vectoriellement* le système $x' = f(x)$. A noter qu'une telle fonction f donne, comme dans le cas $n = 2$, un champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, puisqu'en chaque point $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $f(M)$ est un vecteur de coordonnées $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Tout comme dans le cas $n \leq 2$, un théorème d'existence et d'unicité des solutions permet d'assurer que, si f est continuement dérivable, il existe, pour toute condition initiale $M_0 \in \mathbb{R}^n$, une unique solution isuue de ce point.

Les équilibres (ou solutions stationnaires) sont des solutions constantes, c'est-à-dire telles que $x_i(t) = x_i^* = C^{ste}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ces équilibres sont donc les points $M^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ solutions du système de n équations à n inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ .... & = & ... \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

.

Systèmes linéaires

Lorsque la fonction f qui permet de définir le système différentiel est une fonction linéaire, de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ .... & = & .... \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right. \tag{3}$$

ou, plus simplement, $x' = Ax$ et on dit qu'il est linéaire.

Les systèmes linéaires sont importants puisqu'ils fournissent des approximations locales de la dynamique d'un système non linéaire au voisinage de ses équilibres.

On peut vérifier facilement que l'ensemble des solutions d'un système (3) forment un espace vectoriel de dimension n et donc, si l'on connait n solutions linéairement indépendantes, on peut calculer n'importe quelle solution (comme combinaison linéaire de ces n solutions. Il est le plus souvent facile de calculer une base de l'espace des solutions dès que l'on connait le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres. On a le résultat important suivant :

Proposition 1 *Pour un système linéaire (3), on a les propriétés suivantes :*

- *Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelles strictement négatives, alors l'équilibre $(0, 0, \ldots, 0)$ du système (3) est asymptotiquement stable, c'est-à-dire que toutes les solutions convergent vers cet équilibre lorsque t tend vers l'infini. On dit qu'il s'agit d'un noeud stable lorsque toutes les valeurs propres sont réelles. Dans ce cas, la convergence vers l'équilibre est sans oscillations. Si certaines valeurs propres sont complexes la convergence peut comporter des oscillations.*
- *Si au moins une valeur propre de A est de partie réelle strictement positive, la plupart des solutions tendent vers l'infini (et non pas vers l'équilibre) quand t tend vers l'infini.*

– *Les valeurs propres imaginaires pures (de partie réelle nulles) conduisent à des comportements de type centre, c'est-à-dire des oscillations périodiques autour de l'équilibre.*

La preuve est facile puisqu'il est possible de calculer les solutions explicitement : en effet, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de A (supposées distinctes) de vecteurs propres $V_1, V_2, \ldots, V_n$, alors les n vecteurs $e^{\lambda_1 t}V_1, e^{\lambda_2 t}V_2, \ldots, e^{\lambda_n t}V_n$ forment une base de l'ensemble des solutions.

Critère de stabilité locale

Dans le cas d'un système non linéaire (1), il suffit en général, comme en dimension 1 ou 2, de linéariser le système en ses points d'équilibre pour connaitre la nature locale de la dynamique au voisinage de ses points d'équilibre. Rappelons que le linéarisé d'un système (1) au voisinage d'un équilibre M^* est donné par le système $x' = Ax$, où A est la matrice jacobienne de f calculée au point M^*. On a le résultat suivant :

Théorème 2 *Si un système (1) possède un équilibre M^*, cet équilibre est* asymptotiquement stable *(c'est-à-dire que toute solution issue d'un point suffisamment proche de l'équilibre tend vers l'équilibre quand t tend vers l'infini) si et seulement si toutes les valeurs propres de son linéarisé en ce point M^* ont leurs parties réelles strictement négatives.*

A noter que ce théorème donne des informations sur la dynamique du système non linéaire mais elle n'est valable qu'au voisinage de ses équilibres. C'est pour cela qu'on appelle ce critère un *critère de stabilité locale.*

Pour étendre ces informations locales au dela d'un petit voisinage de l'équilibre et montrer par exemple la stabilité d'un équilibre dans une région $\mathcal{D}$ contenant l'équilibre, l'une des rares méthodes à notre disposition est l'utilisation d'une fonction de Lyapounov.

Fonctions de Lyapounov

On appelle fonction de Liapounov du système (1) dans un domaine $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant un équilibre M^*, une fonction $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, continument dérivable sur $\mathcal{D}$ qui présente un minimum au point M^* et qui soit décroissante sur les trajectoires du système, c'est-à-dire telle que $\Phi(x(t))$ soit une fonction décroissante de t.

Comme on a

$$(\Phi(x(t)))' = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} x_n'(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1(x(t)) + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n(x(t)),$$

cette décroissance s'éxprime par le fait que l'inégalité $Grad(\Phi) \cdot f(x) \leq 0$ doit être satisfaite pour tout $x \in \mathcal{D}$. Géométriquement cela signifie que les trajectoires du système *descendent* les surfaces de niveau de la fonction de Liapounov Φ, ce qui les conduit donc inéluctablement, lorsque t augmente, vers le minimum de Φ dans le domaine $\mathcal{D}$ qui est l'équilibre M^* du système différentiel.

Exercice Le modèle suivant est appelé le modèle d'exclusion compétitive. Il modélise la compétition entre n entreprises qui se partagent un marché. On désigne par $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ la part de marché détenue à l'instant t par chacunes d'elles. Le taux de croissance de chaque entreprise comporte une part de croissance propre $x_i'(t) = \beta_i x_i(t)$ ($\beta_i$représente le taux naturel de croissance propre de l'entreprise en l'absence de compétiteurs) mais sa croissance est limitée (un peu comme dans un modèle logistique) par la concurrence des autres à travers un terme $x_i'(t) = -\gamma_i F_i(x(t)) x_i(t)$ qu'on supposera ici linéaire pour simplifier $F(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Ceci conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & (\beta_1 - \gamma_1 F(x))\, x_1 \\ x_2' & = & (\beta_2 - \gamma_2 F(x))\, x_2 \\ .... & = & .... \\ x_n' & = & (\beta_n - \gamma_n F(x))\, x_n \end{array} \right. \tag{4}$$

Montrer que, si l'on suppose que les $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$ sont tous différents, une seule entreprise, celle qui a le plus grand coefficient $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$, supposons que ce soit celle qui porte le numéro $i = 1$, va survivre, les $n-1$ autres étant conduites à la disparition. Cela se traduit par la présence d'un unique équilibre stable dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première. On pourra vérifier pour cela que, sous les hypothèses faites, la matrice jacobienne du système est une matrice triangulaire avec des coefficients nuls sous la diagonale et des coefficients strictement négatifs sur la diagonale.