Corrigé

Université de Nice
Département de Mathématiques

L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013

NOM : Date : .

PRENOM : Groupe : .

Feuille-question du TP 3
Etudes de champs de vecteurs autonomes et non autonomes

Exercice 1. : On étudie l'équation différentielle linéaire autonome $y' = -2y$.

1. Indiquer quel est l'ensemble des solutions de cette équation. Vérifier que $y = 0$ est une solution particulière (et un équilibre) et indiquer quelle est la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 2$.

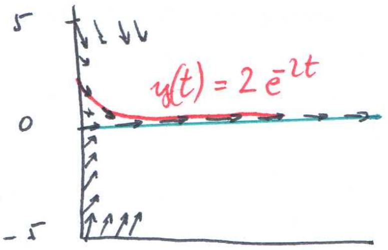
L'ensemble des solutions de $y' = -2y$ est constitué des $y(t) = Ce^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Pour $C = 0$ on trouve $y(t) = 0$
$2 = y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = C$; $y = 2e^{-2t}$ est la solution telle que $y(0) = 2$

2. Les lignes suivantes permettent de tracer, dans la fenètre numérotée 0) le champ de vecteurs (appelé chlin)associé à cette équation en traçant, en tout point (t, y) du plan un vecteur de taille normalisée proportionnel à $(1, -2y)$ et donc tangent à la solution de l'équation différentielle passant par ce point.

```
xset("window",0);
function tprim=f(t,y); tprim=1; endfunction;
function yprim=g(t,y); yprim=-2*y; endfunction;
function vprim=chlin(t,v);vprim=[f(v(1),v(2)),g(v(1),v(2))]';
endfunction;
fchamp(chlin,0,0:1:15,-5:1:5);
```

$[0..15]_1$ $[-5..5]_1$

Selon la question précédente, quelles courbes issues des points (0, 0) et (0, 2) sont tangentes à ce champ ?



La figure présente toutes les flèches $(t, -2y)$ attachées aux points $(t, y) \in [0..15]_1 \times [-5..+5]_1$

3. L'instruction `fchamp` comporte 4 arguments obligatoires (et d'autres facultatifs). Etudier a quoi correspondent ces arguments dans l'aide en ligne puis faites les deux expériences suivantes en expliquant ce que vous observez :
   - remplacer la liste des ordonnées `-5:1:5` par `-2:1:2`
   - remplacer le pas de temps et d'espace (qui vaut 1 par 0.5

fchamp(chlin, 0, 0:1:15, -2:1:+2) ne représente que les flèches pour $y \in [-2..2]_1$

fchamp(chlin, 0, 0:0.5:15, -2:0.5:+2) représente quatre fois plus de flèches, attachées à $(t, y) \in [0..15]_{1/2} \times [-2..+2]_{1/2}$

Arguments : fchamp(f, t, xr, yr)
avec f une fonction de trois variables t, x, y et valeur vecteur 2 lignes 1 colonne
t = une valeur de t   xr = un ensemble de valeurs de x, yr = un ensemble de valeurs de y.

4. Revenir au tracer original du champ de vecteurs et ajouter sur la même figure le graphe de la function $y(t) = 2e^{-2t}$. Qu'observez-vous ?

plot(0:0.1:15, 2*exp(-2*[0:0.1:15])) trace le graphe de la solution $y(t) = 2e^{-2t}$; on observe que cette courbe est bien tangente aux flèches représentées.

Exercice 2. **:** On étudie à présent l'équation différentielle $y' = -2y + 5\cos t$.

1. Tracer le champ de vecteurs associé en choisissant les intervalles `0:0.5:15` pour t et `-5:0.5:5` pour y. Qu'observez-vous concernant la dynamique des solutions de cette équation ?

On perçoit dans la région $y \in [-2, +2]$ la possibilité de courbes, tangentes aux champ de vecteurs, qui oscillent.

2. Trouver, par le calcul, deux constante A et B telles que $y(t) = A\cos t + B\sin t$ soit une solution particulière de l'équation. Quelle est la condition initiale de cette solution particulière.

On a $-A\sin t + B\cos t = y'(t) \overset{(!)}{=} -2y(t) + 5\cos t = -2A\cos t - 2B\sin t + 5\cos t$
$= (5-2A)\cos t - 2B\sin t$

où l'égalité (!) exprime qu'on veut que $y(t)$ soit solution.
Pour que les termes extrêmes soient égaux il suffit que

$\begin{cases} -A = -2B \\ B = 5-2A \end{cases}$ qui conduit à $\begin{matrix} A = 2B \\ 5B = 5 \end{matrix}$ d'où $B=1$ et $A=2$ $\boxed{y(t) = 2\cos t + \sin t =: y^*(t)}$

3. Indiquer quel est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle considérée et préciser laquelle vaut 0 à l'instant $t = 0$.

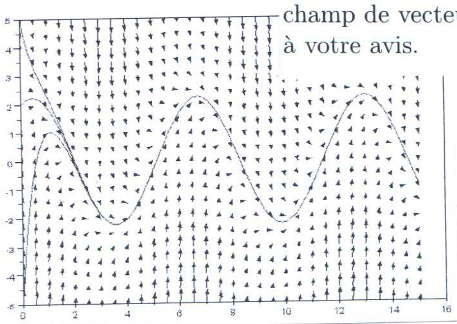
On sait que la solution générale de $y = a(t)y + b(t)$ est

$y = \underbrace{Ce^{A(t)}}_{\text{sol. générale de } y' = a(t)y} + y^*(t)$, $A'(t) = a(t)$

$y^*(t)$ ← solution particulière quelconque

D'où $\underline{\underline{y(t) = Ce^{-2t} + 2\cos t + \sin t}}$

4. Ajouter le graphe de la solution particulière et de la solution précédente à votre figure comportant le champ de vecteurs. On appelle la solution particulière un *équilibre dynamique*. Expliquez pourquoi à votre avis.



On voit que le terme Ce^{-2t} tends rapidement vers 0, ce qui montre que toutes les solutions tendent vers la solution particulière y^* (qui correspond à $C=0$) qui apparaît donc comme un régime d'équilibre oscillant (donc dynamique).

Exercice 3. : Chmaps autonomes / non autonomes Le champs de vecteurs associé à l'équation $y' = -2y$ est invariant par translation horizontale. Est-ce aussi le cas pour celui qui est associé à l'équation $y' = -2y + 5\cos t$? Expliquer pourquoi.

Non, lorsqu'on se translate horizontalement la valeur de $\cos(t)$ change ; le champ n'est donc pas invariant par translation horizontale, sauf par celle d'un multiple entier de 2π : le champ est périodique de période 2π.

Exercice 4. : Tracer le champ de vecteurs associé à une équation logistique (resp. une équation d'Allée) et vérifier graphiquement l'existence et la stabilité de ses 2 (resp. 3) équilibres.