Université de Nice — L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013
Département de Mathématiques
NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Feuille-question du TP 2
Introduction aux équations différentielles ordinaires

Rappelons ci-dessous quelques instructions Scilab que nous avons utilisées la dernière fois, et donnons quelques précisions suplémentaires qui vous aideront à progressivement écrire vos propres programmes.

Précisions tout d'abord que tout ce qui est situé à droite de `//` est ignoré par Scilab, c'est à dire que l'interpréteur de commande n'en tient pas compte : c'est un simple *commentaire* entre celui qui écrit le programme et son lecteur. Souvent il s'agit de la même personne, à deux moments successifs ;-) .

```
clear ;// ceci reinitialise toutes les variables: ce n'est
// utile qu'en cas de reexecution de tout le programme
r=0.5 ;K=100 ; //initialisation des constantes
function ffff=fLogistique(y) ; //dans cette égalité, à droite se trouve le nom de la
// fonction et à gauche le nom d'une variable locale (que l'on appelle comme on veut).
ffff=r*y.*(1-y/K)
endfunction ;// l'appel de FLogistique(y) retournera la valeur obtenue de ffff
y=0:0.1:K ;// y est donc une liste de valeurs, de 0 a K par pas=0.1
plot(y,fLogistique(y)) ;//courbe liant les points specifiés
```

Executez le code ci-dessus (vérifiez qu'il est inutile de taper les commentaires) puis recommencez avec `y=0:10:K` pour mieux comprendre la syntaxe de `x=debut:pas:fin ;` et de `plot(x,f(x)) ;`

La commande `gca()` retourne une "prise" (en anglais "handel", poignée) sur les propriétés graphiques de la figure. Voici comment nous avons supprimé la boîte (`box`) tracée, sinon, autour du graphique.

```
a=gca() ;a.box="off" ;
```

On peut alors aussi choisir l'origine comme abscice du point de rencontre des axes tracés :

```
a.x_location="origin" ;
```

Nous avons aussi vu que, si l'on se donne une "condition initiale" (t_0, y_0), l'instruction Scilab `ode(y0,t0,t,f) ;` donne la valeur (approchée) de la solution y de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$, pour t_0=`t0` et y_0=`y0`. Notons que `f` doit être une fonction de deux variables (ici `t` et `y`). Observez l'ordre ("inversé") des variables `y0,t0` (dans `ode`) et `t,y` (dans `f`).

```
function f=fL(t,y) ; f=fLogistique(y) endfunction ;
xset("window",1) ;// cree et choisit une nouvelle fenetre graphique, de numero 1
t0=0 ;y0=5 ;t=0:0.1:20 ;
y=ode(y0,t0,t,fL)) ;
plot(t,y) ;
```

Exercice 1. **:** Soulignons que nous avons écrit `.*` pour la multiplication, dans la définition de la fonction `fLogistique`. Cela a permis de calculer `y.*(1-y/K)` pour `y=0:0.1:N` .

1. Pour mieux comprendre cette multiplication particulière, indiquer ce que vaut tt y, `(1-y/K)` et `y.*(1-y/K)`.

2. Indiquer ce que vaut tt y', `(1-y/K)'` et expliquer pourquoi il est possible de calculer `(1-y/K)*y'` et pas `(1-y/K)*y`.

Exercice 2. **:** On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,2y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Expliquer pourquoi toutes les solutions de cette équation sont croissantes.

2. On pose $f(y) := 0,2y^2$. Calculer $f(y(t))$ et $y'(t)$, où y est donnée par $y(t) = \frac{10}{1-t}$.

   $f(y(t)) =$

   $y'(t) =$

3. En déduire que la fonction y considérée est une solution de l'équation différentielle

4. Quelle est sa valeur à l'instant initial `y0` ?

Exercice 3. **: Explosion**

1. Definir une `function ff=f(t,y)` telle que les instructions suivantes donnent une représentation graphique de la solution y :

   ```
   tFinal=0.9;t=0:0.01:tFinal;
   y=ode(y0,0,t,f)
   plot(t,y);
   ```

   Que trouvez-vous pour les deux quantités suivantes :

   $y(0.9) =$

   `ode(y0,0,tFinal,f)`=

2. Calculer la différence et commentez

3. Recommencez votre dessin avec `t=0:0.1:tFinal;` et expliquer la différence

   Recommencez votre dessin avec `tFinal=0.99;` puis avec `tFinal=0.999;`. Expliquer

Exercice 4. : Usage d'un bactéricide

On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

1. Expliquer pourquoi ceci peut être modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,2y(t)^2 - 50y(t).$$

2. Tracer le graphe de la fonction $h(y) = 0,2y^2 - 50y$ pour $y \in [0, 1000]$ qui définit cette équation, à l'aide d'une instruction `plot(y,h(y))` pour des `y` et `h` convenablement définis. Indiquer l'allure du graphe obtenu :

3. En vous servant du signe de cette fonction `h` , prévoir le comportement de cette population de bactéries selon sa taille initiale $y(0)$.

4. Vérifiez votre "prediction" en representant des solutions au moyen d'une instruction `plot(t,ode(y0,0,t,hh))` pour diverses valeurs de `y0` égales à 0, 10, 100, 200, 201, où `hh(t,y)=h(y)`.

5. Que se passe-t-il pour `y0=251` ? Vous pouvez vous aider de l'observation du dessin resultant des commandes
   `tt=0:0.01:0.11;yy=ode(251,0,tt,hh);plot(tt,yy);`

6. Expliquer pourquoi le traitement ne pourra être efficace que si `y0<250`.

7. Que faudrait-il faire, à votre avis, si l'on avait `y0=251` ?