

**Feuille-question du TP 5**  
**Système dynamique linéaires du plan et linéarisé d'un système non-linéaire**

## 1 Etude d'un système non-linéaire présentant un col

On considère le système (non-linéaire)

$$\begin{cases} x' &= x(3-x-2y) \\ y' &= 0.5y(3-2x-y) \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que le point  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  est un *équilibre* du système et préciser quels sont les 3 autres équilibres.

2. Le code suivant permet de représenter le champ de vecteurs associé au système (1) puis de tracer une trajectoire de condition initiale M0.

```
function f=f(x,y) ; f=x*(3-x-2*y) ; endfunction ;  
function g=g(x,y) ; g=0.5*y*(3-y-2*x) ; endfunction ;  
function w=w(t,v) ;  
w=[f(v(1),v(2));g(v(1),v(2))] ;  
endfunction ;  
xx=0:0.2:3 ;yy=0:0.2:3 ;  
xset("window",1) ;  
fchamp(w,0,xx,yy) ;  
M0=[2.5;3] ;tt=0:0.01:2  
M=ode(M0,0,tt,w) ;  
xt=M(1,:) ;yt=M(2,:) ;  
plot(xt,yt) ;
```

Executez ce code puis reproduire sur une figure ci-dessous la trajectoire ainsi que les points d'équilibre.

3. choisir 3 ou 4 autres conditions initiales et ajouter à votre figure ci-dessus les trajectoires obtenues. Quelle est la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la première trajectoire tracée (pour le vérifier, modifier votre code pour tracer une trajectoire plus longue et expliquer ci-dessous comment vous faites) ?

4. Revenir à l'intervalle de temps  $tt$  initial. Saisir le code suivant et l'exécuter. Préciser, ligne après ligne, ce que fait ce code.

```
for numerotraj=1:100
    M0=[3*rand();3*rand()];
    M=ode(M0,0,tt,w);
    xt=M(1,:);yt=M(2,:);
    plot(xt,yt);
end;
```

## 2 Linéarisé du système différentiel

1. Calculer la matrice jacobienne  $A$  du système différentiel (1) au point d'équilibre  $(1,1)$ .

2. L'instruction suivante permet de trouver les valeurs propres et des vecteurs propres de  $A$

```
[R,diagevals]=spec(A);
disp(R,"vecteurs propres",diagevals,"valeur propres");
```

Quelles sont les valeurs propres  $\lambda$  de  $A$  ? Représenter approximativement les deux vecteurs propres.



6. Exécutez le code suivant concernant le champ non linéaire  $w$  :

```
M0=[1 ; 1] ; eps=0.0000001 ;  
JAC=[w(0,M0+eps*[1 ; 0])-w(0,M0),w(0,M0+eps*[0 ; 1])-w(0,M0)]/eps ;  
disp(JAC ; 'systeme à la loupe=') ;  
Qu'observez-vous ? Expliquez.
```

7. Reprendre l'étude du linéarisé au voisinage de chacun des 3 autres équilibres.