Université de Nice | L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013
Département de Mathématiques
NOM : | Date : .
PRENOM : | Salle et heure : .

Feuille-question du TP 6
Système de Lotka-Voltera, son linéarisé, sa perturbée

On se propose d'étudier le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(1-2y) \\ y' & = & -y(1-2x) \end{array} \right. \tag{1}$$

1. Le code Scilab suivant a permis d'esquisser le champ de vecteurs d'un autre système dans le carré de coté $[0;3]$. Adapter ce code pour obtenir le champ de vecteurs du système (1) dand le carré de coté $[0;1]$.

```
function f=f(x,y) ; f=x*(3-x-2*y) ; endfunction ;
function g=g(x,y) ; g=0.5*y*(3-y-2*x) ; endfunction ;
function w=w(t,v) ;
w=[f(v(1),v(2));g(v(1),v(2))] ;
endfunction ;
xx=0:0.2:3 ;yy=0:0.2:3 ;
xset("window",1) ;
fchamp(w,0,xx,yy) ;
```

   Expliquez quelles lignes vous avez modifiées ?

2. En regardant ce champ de vecteurs pouvez-vous deviner l'allure de la trajectoire issue du point $(0.5; 0.5)$? Vérifez votre conjecture par un calcul.

3. Le code suivant permet d'obtenir d'autres trajectoires :

```
tt=0:0.01:10;
for x0=0:0.1:0.5
      M0=[x0,0.5]' ;
      M=ode(M0,0,tt,w) ;
      x=M(1,:) ;y=M(2,:) ;
      plot(x,y) ;
end ;
```

   Combien a-t-on choisi de conditions initiales, et où se trouvent-elles ? Combien de trajectoires voyez-vous ? Expliquez

4. Déterminer, en examinant la figure précédente, l'amplitude approximative de chacune des deux composantes de la solution du système issue du point $(0.1; 0.5)$. Expliquer.

5. Le code `plot(tt,xt)` permet de tracer le graphe de la première composante de la solution du système. Tracer la puis tracer sur la même figure le graphe de la deuxième composante. Reproduire approximativement les deux graphes obtenus et vérifier sur cette figure vos réponses à la question précédente.

6. Déterminer une valeur approximative de la période de cette solution. Les autres solutions du système ont-elles la même période ?

7. Calculer le linéarisé du système au voisinage du point d'équilibre non-nul M_0 et en déduire la nature de cet équilibre.

8. On a vu qu'on peut calculez les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A au moyen des instructions suivantes

```
[R,diagevals]=spec(A);
disp(R,"vecteurs propres",diagevals,"valeur propres");
```

Quelles valeurs et vecteurs propres obtenez-vous pour la matrice jacobienne du système au voisinage du point d'équilibre non-nul M_0 ? Pouviez-vous le prévoir ?

9. Nous avons vu que si λ est une valeur propre de la matrice du système linéaire et V un vecteur propre associé, $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est une solution du système. Expliquer comment sont définies les fonctions `M1` et `M2` ci-dessous (quelle est leur expression mathématique) puis saisir ce code.

```
lambda=diagevals(1,1);
Z1=R(:,1);
function M1=M1(t);M1=real(exp(lambda*t)*Z1);endfunction;
function M2=M2(t);M2=imag(exp(lambda*t)*Z1);endfunction;
```

10. Le code suivant trace la courbe représentative d'une combinaison linéaire $aM_1(t) + bM_2(t)$, choisie aléatoirement, des fonctions M_1 et M_2.

```
N=100;T=2*%pi;delta_t=T/N;
x=zeros(1,N+1);y=zeros(1,N+1);
a=rand();b=rand();
for i=0:N
      M=a*M1(i*delta_t)+b*M2(i*delta_t);
      x(i+1)=M(1);
      y(i+1)=M(2);
end;
plot(x,y,'r-');
```

En ajoutant sur cette figure le champ de vecteurs du linéarisé, qu'observez-vous ?

11. On considère à présent le système suivant (le système de Lotka-Voltera correspond au cas $\alpha = 0$).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(1-2y-\alpha x) \\ y' & = & -y(1-2x+\alpha y) \end{array} \right. \tag{2}$$

12. Esquissez les trajectoires pour $\alpha = 0.1$. Qu'observez-vous ?

13. Trouver le point stationnaire sans coordonnée nulle M_α

14. Quelles valeurs propres et vecteurs propres vous donne `Scilab` pour le linéarisé en ce point ?

15. Recommencez avec $\alpha = -0.1$. Quelle différence de comportement constatez-vous ?