Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013

Date : .
Salle et heure : .

Feuille-question du TP 7
Dynamique des populations : matrices de Leslie

Considérons une population de saumons en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde, et enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 juveniles au cours de sa deuxième année et à 5 au cours de sa troisième année. Si l'on désigne respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t des femelles juvéniles, des femelles préadultes (saumons de 1 an) et des femelles adultes (saumons de 2 ans), les informations précédentes peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} j_{t+1} & = & 4p_t + 5a_t \\ p_{t+1} & = & 0,53 j_t \\ a_{t+1} & = & 0,22 p_t \end{array} \right. \qquad (1)$$

1.- Indiquer qu'elle est la matrice de Leslie L de cette dynamique, calculer L^2 et L^3 puis vérifier que la matrice L est *primitive*.

$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix}$

On pose L=[0, 4, 5; 0.53, 0, 0; 0, 0.22, 0]
On calcule L^2, L^3, ...
pour L^5 on trouve $\begin{pmatrix} 2.47.. & 18.6.. & 22.4.. \\ 2.38.. & 2.47.. & 1.54.. \\ 0.06.. & 0.98. & 1.23.. \end{pmatrix} > 0$
Donc L est primitive (On aurait aussi pu calculer L^50...)

2.- Le théorème de Perron Frobenius assure que la distribution limite est un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module, dite *valeur propre dominante*. Nous allons expérimenter ceci pour les saumons considérés. Comme c'est une distribution, il convient de diviser les coefficients du vecteur propre donné par `Scilab` (qui est normé pour la norme euclidienne) par la somme de ses coefficients (ils sont positifs) obtenant ainsi un vecteur normé pour la norme des la somme des (valeurs absolues) des coefficients, souvent appelée “norme 1”.

```
//Calcul des vecteurs propres et valeurs propres
[vcp,vlp]=spec(L) ;
//vecteur ligne ('r'=row) des sommes par colonnes
normes1vcp=sum(vcp,'r') ;
//calcul des vecteurs "renormalisés"
for ligne=1:3 ;
      vcpnorme(ligne,:)=vcp(ligne,:)./normes1vcp ;
end ;
disp(vcpnorme,"vecteurs propres=", vlp,"valeurs propres") ;
```

Quelle valeur propre dominante λ trouvez-vous et quelle distribution limite V_∞ ?

La valeur propre dominante est $\lambda = 1.5778145$
Elle est placée dans la première colonne de vlp. La distribution d'équilibre est donc dans la première colonne de <u>vcpnorme</u> $\begin{pmatrix} 0.723.. \\ 0.242.. \\ 0.033.. \end{pmatrix}$

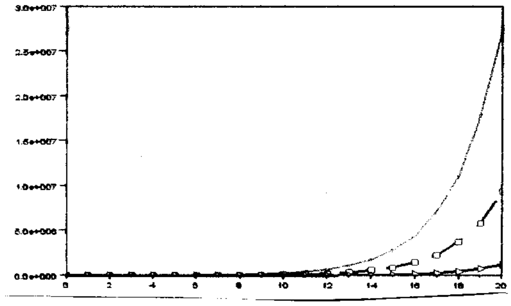
NB: sum(vcp,'r') donne le vecteur ligne (r="row") des somme des colonnes.

3.- On veut calculer la dynamique d'une population qui, à l'instant initial, comporte 2000 juvéniles, 1000 préadultes, et 500 adultes.

```
//condition initiale
V0=[2000 ;1000 ;500] ;
// il y aura tMax+1 instants
tMax=20 ;
// initialisation de V
V=zeros(3,tMax+1) ;
V(:,1)=V0 ;
```

```
//voici les instants où V(t) sera calculé
tt=0:tMax ;
//Calcul des V_{t+1} pour t>0  ; rangé dans V(:,t+1+1)
for t=0:tMax-1 ;//on calcule V_{t+1}
V(:,t+1+1)=L*V(:,t+1) ;
end ;
//size(tt)//pour debuggage: verifier que les tailles sont egales.
//size(V)
j=V(1,:) ;//les juveniles
p=V(2,:) ;//les preadultes
a=V(3,:) ;//les adultes
//juveniles en vert, preadultes en bleu, adultes en rouge
plot(tt,j,'g-*') ;plot(tt,p,'b--o') ;plot(tt,a,'r.->') ;
```

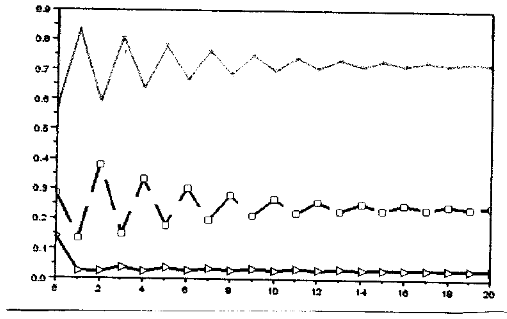
Esquissez avec soin les tracés obtenus



4.- Dynamique de la distribution des trois sous-populations

```
xset("window",1) ;
total=j+p+a ;
plot(tt,j./total,'g-*') ; plot(tt,p./total,'b--o') ; plot(tt,a./total,'r.->') ;
```

Qu'observez-vous ? Pouviez-vous le prévoir ?



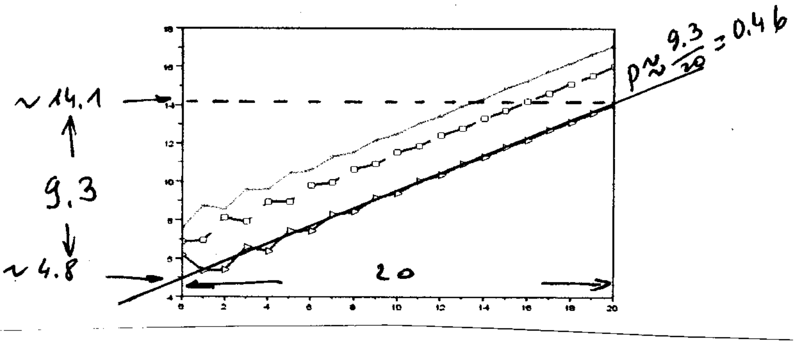
On observe que la distribution tend vers l'équilibre trouvé à la question 2 comme le prévoit le théorème de Perron-Froebenius

On observe également une oscillation non prévue

5.- Log de cette dynamique

```
xset("window",2) ;
plot(tt,log(j),'g-*') ; plot(tt,log(p),'b--o') ; plot(tt,log(a),'r.->') ;
```

Qu'observez-vous ? Expliquez en quoi cela montre que la dynamique des trois population est "en $Ce^{\lambda t}$" ; quelle est la valeur de λ ?



On procède à une régression linéaire empirique avec règle et stylo. On trouve une droite de pente 0.46 qui n'est pas la valeur $1.577.t = \log e^{\lambda t}$ annoncée en cours !!!

En fait $0.46 \simeq 0.4574248 = \log(1.577\ldots)$

La croissance est donc en $e^{\log(\lambda)t} = \lambda^t$

6.- Une autre manière de programmer le tracé la dynamique

```
xset("window",3) ;
```

total est le vecteur ligne

./ effectue la division de W(i,j). par total(j) pour toutes les colonnes j

```
Couleur=['g-*','b--o','r.->'];for ligne=1:3;
W(ligne,:)=V(ligne,:)./total;
plot(tt,W(ligne,:),Couleur(ligne))
end;
```

7.- Un modèle de Leslie a été proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individu de sexe féminin, c'est-à-dire en ignorant les naissances masculines dans les taux de fécondités des classes, on a choisi dix classes d'âge d'une durée de cinq ans et un pas de temps de cinq ans également. On a obtenu les coefficients suivants sur la première ligne de la matrice

$$\begin{array}{cccccccccc} (\ 0,000 & 0,0010 & 0,878 & 0,3487 & 0,4761 & 0,3377 & 0,1833 & 0,0761 & 0,174 & 0,0010\ ) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

et les coefficients suivants sur la sous diagonale

$$\begin{array}{ccccccccc} (\ 0,9966 & 0,9983 & 0,9979 & 0,9968 & 0,9961 & 0,9947 & 0,9923 & 0,9987 & 0,9831\ ) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Saisir la matrice de Leslie L correspondante en commençant par

```
LL=zeros(10,10) ;
LL(1,2)=0.001 ;...........
```

pour la première ligne, puis par

```
LL(2,1)=0.9966 ; .......
```

pour la sous diagonale et executer le code suivant :

```
[vcpLL,vlpLL]=spec(LL) ;
//NB: ouvrir en grand la fenetre "console" avant d'executer les instructions suivantes
disp(LL,'Matrice de Leslie LL =') ;
disp(vlpLL,'valeurs propres de LL =') ;
disp(vlpLL*conj(vlpLL),'carré des normes euclidiennes') ;
disp(vcpLL,'vecteurs propres de LL =') ;
vlpLL(1,1)^(1/5) ;
```

Quelle est la valeur propre la plus grande en norme euclidienne ?

vlpLL =: D est la matrice diagonale des valeurs propres de LL,
vlpLL * conj(vlpLL) = $D\bar{D}$ est la matrice diagonale des $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2$
J'observe sur le resultat que la plus grande valeurs $\lambda\bar{\lambda}$ est obtenue pour $\lambda = LL(1) = 1.22$

8.- Quel est le taux de croissance annuel de cette population ?

Sur 5 ans on a donc (à l'équilibre) un taux de croissance de 1.22
Le taux de croissance annuel est donc $\sqrt[5]{1.22..} = \underline{1.0406419}$
ou encore une croissance annuelle de $\boxed{4,06\%}$

9.- Quelle est la distribution d'équilibre de cette population ? Donner le code Scilab.

disp(vcpLL(:,1)/sum(vcpLL(:,1)), 'distribution d''équilibre')

normalisation

on avait observé que c'est vlpLL(1,1) la vlp dominante

attention : doublement des apostrophes pour les chaînes entre apostrophes !

0,2111..
0,1724..
0,1410..
0,1153..
0,0942..
0,0768..
0,0626..
0,0509..
0,0416..
0,0335..

Révision : répondre aux questions suivantes *sans utiliser* Scilab.

10a.- Comment s'écrit, en Scilab, le vecteur colonne de composantes 1, 2, 3,

[1;2;3]

10b- Comment s'écrit le vecteur ligne ayant ces mêmes composantes ?

[1, 2, 3] ou [1 2 3]

10c.- Que représente A(2,:) ?

c'est la 2ème ligne de la matrice A

10d.- Que représente B(:,3) ?

c'est la 3ème colonne de la matrice B

10e.- Comment calculer la matrice des vecteurs propres d'une matrice `A` ?

[vlp , vcp] = spec(A) ; la matrice des vecteurs propres est la matrice vcp

10f.- Ces vecteurs propres sont-ils en ligne ou en colonne ?

Ils sont en colonnes

10g.- Si `plot(0:0.1:2,y,'r.x')` ne retourne pas d'erreur que retourne la commande `size(y)` ?

S'il n'y a pas d'erreur c'est que 0:0.1:2 et y ont le meme nombre d'elements
Or 0:0.1:2 a $\frac{2-0}{0.1}+1 = 20+1 = \boxed{21}$ elements ; on a donc size(y) = 21

10h.- Que retourne la commande `disp('décembre',25,'Noel a lieu le');` ?

Noel a lieu le 25 decembre

10i.- Si `A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]` que retourne `sum(A,'c')` ?

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{matrix}}$$

10j.- Est-ce un vecteur ligne ou un vecteur colonne ?

c'est un vecteur colonne

10j.- Comment tracer le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ pour x entre 0 et 1 ?

xx = 0:0.01:1 ; plot(xx, xx^2-1);

10j.- Comment définir un champ de vecteurs w pour que `ode(M0,0,tt,w)` ~~trace~~ calcule la solution issue du point M_0 du système différentiel $x' = y$, $y' = x$ pour tt entre 0 et 5 ?

voir ci-dessous

10j'.- Comment tracer la solution calculée de cette façon ?

xt = M(1,:); yt = M(2,:);
plot(xt, yt);

```
function f= f(x,y); f=y; endfunction;
function g = g(x,y); g=x; endfunction;
function w = w(t,v); w = [ f(v(1),v(2)) ; g(v(1),v(2))]; endfunction;
M0 = [3; 2]      //(par exemple !)
tt = 0:0.05:5    // (pour un pas 0.05, par exemple)
M = ode(M0,0,tt,w);
```