

8. Démontrez que $y(t) = K$ est une solution de l'équation logistique (indication : calculer $f(t, y(t))$).

Pour montrer qu'une fonction $t \mapsto y(t)$ est solution, il suffit de vérifier que $y'(t) = f_{\text{Logistique}}(y(t))$; or pour $y(t) = K$ pour tout t , on a $f_{\text{Logistique}}(y(t)) = f_{\text{Logistique}}(K) = rK(1 - K/K) = 0 = (K)' = y'(t)$
(Q.E.D.)

9. Qu'en déduisez-vous sur le comportement de la solution de l'équation logistique issue de la condition initiale $(t_0, y_0) = (0, K)$?

La solution issue de $(t_0, y_0) = (0, K)$ est donc la solution ci-dessus (unicité des solutions, à condition initiale fixée) qui est constante. Cette solution est donc constante.

10. Démontrer que $y(t) = N$ est une solution de l'équation d'Allee. Cette équation a-t-elle une autre solution constante ?

Soit $y(t) = N$ pour tout t ; on a $f_{\text{Allee}}(y(t)) = f_{\text{Allee}}(N) = ry(\frac{N}{M} - 1)(1 - \frac{N}{N}) = 0 = (N)' = y'(t)$

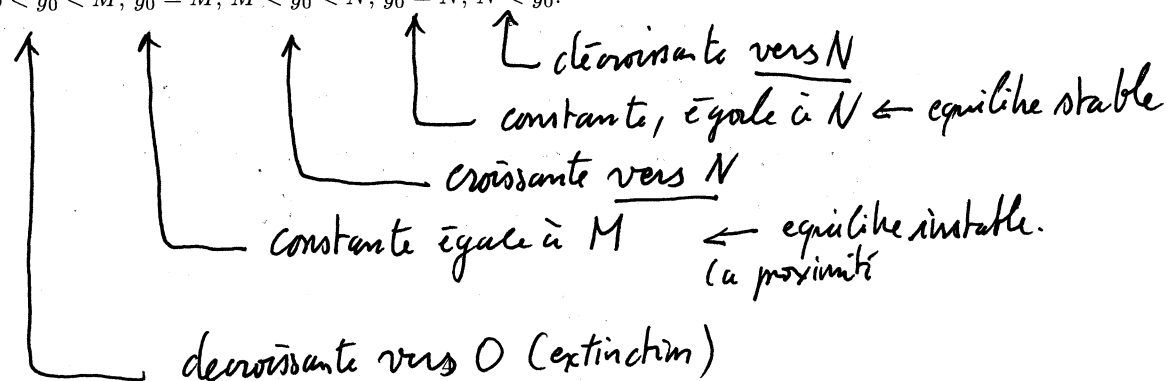
La fonction constante $y(t) = N$ est donc bien solution.

On voit qu'on montrerait de même que $y(t) = M$ est également une solution constante de l'équation d'Allee.

11. On suppose que $y(t)$ représente la taille d'une population d'écureuils au cours du temps. Indiquez ce qu'il advient de cette population d'écureuils (explosion, extinction, ...), selon ce modèle, dans les trois cas suivants $y(0) = 9$, $y(0) = 10$, et $y(0) = 20$.

Si $y(0) = 9$ on voit que, comme au paragraphe 3, la population décroît vers l'extinction.
Si $y(0) = 10 = M$ on voit que la population est constante (voir 4.10).
Si $y(0) = 20$ la population sera croissante (puisque $f_{\text{Allee}}(y) > 0$ sur $]10, 100[$).

12. Plus généralement, décrire le comportement de la solution de l'équation d'Allee issue de $(0, y_0)$ selon que $0 < y_0 < M$, $y_0 = M$, $M < y_0 < N$, $y_0 = N$, $N < y_0$.



Feuille-question du TD 1
Prise en main de Scilab - équation d'Allee

1 Prise en main de Scilab

Recherchez le programme Scilab et lancez-le. La fenêtre qui s'ouvre s'appelle la *console*. Elle sert essentiellement à l'affichage des résultats. On peut y saisir une commande, telle la demande d'affichage de la valeur d'une variable (on tape le nom de la variable, puis "return"), mais il convient d'éviter de l'utiliser pour des commandes plus compliquées telles les boucles, etc. car il n'est pas possible de demander la réexécution.

Pour saisir une succession de commandes, il convient d'ouvrir une *fenêtre d'édition*. Pour cela utiliser la commande de menu **Application-Editeur**. Il s'agit d'un assez simple éditeur de texte (il reconnaît quand même le nom des commandes et constantes de Scilab qu'il affiche d'une autre couleur). Comme pour tout éditeur, il convient de commencer par donner un nom au fichier édité. Pour cela, utiliser la commande de menu **Fichier-Sauvegarder-sous** et choisir le nom SysDyn1.sce et éventuellement le disque et répertoire où vous voulez sauvegarder votre séance (votre clé USB par exemple). Il est essentiel de garder les fichiers de vos séances : cela ne vous sera pas seulement utile pour vos révisions ; dès la semaine suivante vous pourrez repartir des idées de la semaine précédente pour développer de nouvelles questions. Le nom choisi se compose de SysDyn car il s'agit du cours de Systèmes Dynamiques, 1 car il s'agit du premier TP de la série 1, 2, ..., 8, et enfin de .sce, qui est l'extension réservée pour les *sources* de Scilab. Par la suite il vous suffira de double-cliquer sur un tel fichier-source pour à la fois lancer Scilab (si ce n'est pas déjà fait) et ouvrir le source dans l'éditeur de Scilab.

À présent, vous allez taper les instructions successives dans votre fenêtre d'édition, puis marquer (en tirant la souris tout en enfonçant le bouton gauche, ou en cliquant en début de texte et par un Maj-click-gauche en fin de zone à marquer), puis demander l'exécution de la zone marquée par la commande de menu **Executer-Evaluer-la-selection**. Ainsi vous construisez progressivement une succession d'instructions et en testez l'effet. Vous pourrez ensuite réexécuter tout ou partie de votre code, dans lequel vous aurez peut-être modifié la valeur de quelques constantes.

Avant d'exécuter tout ou partie de votre code, tapez Ctrl-S (ou exécutez la commande de menu **Fichier-Sauvegarder**) car il arrive que Scilab plante (!) (ou déjante (!!)) c'est-à-dire s'arrête complètement et il ne vous reste plus qu'à repartir, en double-cliquant sur le fichier que vous avez fort heureusement sauvegardé ! Notez que la fenêtre d'édition s'affiche souvent par dessus la fenêtre console, ce qui gêne pour lire les résultats sur cette console. Pour cela, modifiez la place et la taille des deux fenêtres : à gauche une console étroite et à droite un éditeur plus large, les deux s'étirant du haut en bas de votre écran. Evitez tout chevauchement.

2 De l'équation logistique à l'équation d'Allee

On appelle *équation logistique* l'équation différentielle

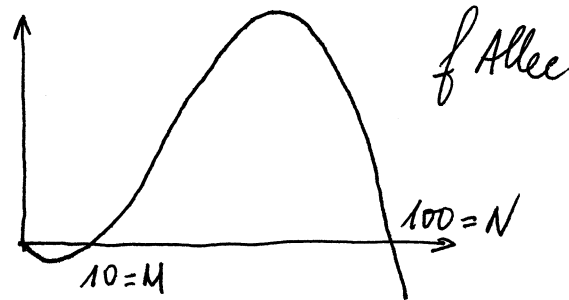
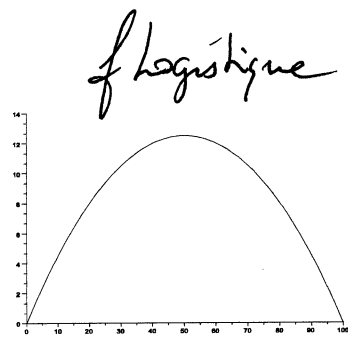
$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad (1)$$

et *équation d'Allee* l'équation similaire

$$y' = ry \left(\frac{y}{M} - 1\right) \left(1 - \frac{y}{N}\right) \quad (2)$$

Ces deux équations sont des modèles de croissance de population, r est le taux de croissance intrinsèque de la population de taille $y(t)$ et K , M , et N sont des constantes. Convenons donc d'appeler *fonction logistique* la fonction $y \mapsto ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ et *fonction d'Allee* la fonction $y \mapsto ry \left(\frac{y}{M} - 1\right) \left(1 - \frac{y}{N}\right)$

Voici une représentation du graphe de la fonction logistique, suivi du code Scilab permettant de tracer son graphe pour $r = 0.5$ et $K = 100$.



```
r=0.5;K=100;
function f=fLogistique(y); f=r*y.*(1-y/K) endfunction;
y=0:0.1:K;
plot(y,fLogistique(y));
```

Saisissez ce code dans votre fenêtre d'édition; marquez une ligne après l'autre et exécutez-la. Observez l'affichage dans la console puis dans la fenêtre graphique. Pour supprimer la "boite" mise autour du session par Scilab, il vous suffit d'exécuter les commandes

```
a=gca(); a.box="off";
```

que vous taperez comme toujours dans la fenêtre d'édition, à la suite des autres, que vous marquerez, puis vous exécuterez. Observez le résultat dans la fenêtre graphique.

A présent adaptez votre code de manière à ce qu'il permette de tracer le graphe de la fonction d'Allee (appelez-la fAllee au lieu de fLogistique), pour M=10 et N=100, et toujours r=0.5. Veillez à taper .* pour la multiplication. Nous reviendrons plus tard sur la différence en * et .*, qui est ici indispensable car nous voulons calculer f(y) pour y=0:0.1:N qui vaut 0,0.1,0.2,...,9.9,10.

Observez que l'axe des x ne passe pas par l'origine; modifiez cela en exécutant les commandes (fenêtre d'édition, sélection, exécution...) suivante; gca signifie "get current axis"; nous y reviendrons.

```
a=gca(); a.x_location="origin";
```

Représentez le graphe de la fonction d'Allee obtenu à côté de la figure ci-dessus. Observer la différence entre les deux graphes.

3 Solutions d'une équation différentielle

La solution d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ toute fonction $t \mapsto y(t)$ telle que la relation $y'(t) = f(t, y(t))$ soit vérifiée à chaque instant. Si, en particulier, si, à un instant donné, $f(t, y(t)) > 0$, alors $y'(t) > 0$ et donc la solution y est croissante à cet instant.

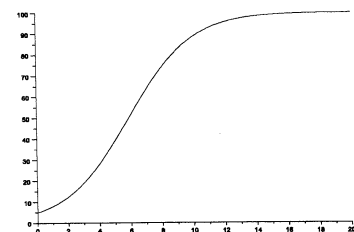
Si l'on se donne une "condition initiale" (t_0, y_0) , l'instruction Scilab `ode(y0, t0, t, f)` donne la valeur (approchée avec 8 chiffres significatifs) de la solution de l'équation $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$, pour $t_0 = t_0$ et $y_0 = y_0$. Notons (ici t et y), d'où la nécessité de définir une "nouvelle" fonction

```
function f=fL(t,y); f=fLogistique(y) endfunction;
```

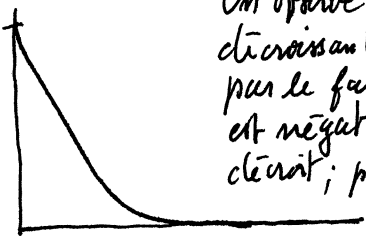
si on considère l'équation logistique. Voici comment calculer, puis tracer le graphe de la solution de l'équation logistique telle que $y(0) = 5$ dans une nouvelle fenêtre, pour $t \in [0, 20]_{0.1}$

```
xset("window", 1); t0=0; y0=5; tt=0:0.1:20; yy=ode(y0, t0, t, fL) plot(tt, yy);
```

qui donne le graphe suivant :



5.0



On observe que la solution est décroissante. Ceci s'explique par le fait que $y'_{Allee}(0) = fA(0, 5) = -1.1875$ est négatif. Donc la solution décroît; par la suite $y'_{Allee}(t)$ restera négatif et y_{Allee} continue à décroître.

Refaites cette figure sur votre ordinateur, puis adaptez votre code pour tracer (dans une deuxième fenêtre graphique que vous pouvez appeler avec `xset("window", 2)`), la solution de l'équation d'Allee ayant la même condition initiale. Définissez en particulier la fonction fA qui doit remplacer la fonction

```
function f=fAllee(y); f=r*(y/M-1)*(1-y/N) endfunction;
function f=fA(t,y); f=fAllee(y) endfunction;
```

fL. Représentez, à droite de cette figure, le résultat que vous obtenez. Qu'observez-vous? Comment expliquez-vous ce comportement différent?

4 Quelques questions

Répondez aux questions suivantes :

1. Que vaut, à 10^{-4} près, à l'instant $t = 5$, la solution y_{logis} de l'équation logistique issue de $(t_0, y_0) = (0, 15)$?

$y_{logis}(5) = 68.2525$ (arrondi à 10^4 de 68.252466...)

Attention, ici $y_0 = 15$ et non $y_0 = 5$ comme dans l'exemple; si vous trouvez 39.0684 c'est que vous avez oublié de faire cette modification!

2. Quelle instruction Scilab avez-vous utilisée?

`ode(5, 0, 15, fL);`

3. Que vaut, à 10^{-4} près, au même instant, la solution de l'équation d'Allee issue de la même condition initiale?

$y_{Allee}(5) = 99.9980$

4. Quelle instruction Scilab avez-vous utilisée?

`ode(5, 0, 15, fA);`

5. Comment expliquez-vous la différence entre les deux modèles?

Dans le modèle d'Allee la population est décroissante lorsqu'elle est inférieure au seuil $M=10$ alors que dans le modèle logistique elle est croissante (sous le seuil $N=100$).

6. Si l'on choisit la condition initiale $(t_0, y_0) = (0, 120)$ la solution de l'équation logistique est-elle monotone? croissante? décroissante?

La commande `plot(tt, ode(120, t0, tt, fL))` permet de tracer la solution de l'équation logistique (pour $t \in [0, 20]_{0.1}$)

On voit que cette solution décroît vers la valeur 100.

7. Pouvez-vous prévoir ce comportement en examinant l'équation?

Soit y_{logis} la solution telle que $y_{logis}(0) = 120$. On a $y'_{logis}(0) = fL(0, 120) = -12 < 0$; donc y_{logis} décroît pour $t=0$.

puis $y'(t) = fL(t, y(t))$ reste négatif, tant que $y(t) > 100$, d'où la décroissance observée.