NOM : Date : 23 Octobre 2012 .
PRENOM :

Systèmes Dynamiques : Feuille-réponses du TD 1
Existence et unicité des solutions

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1

1. Vérifier que $y(t) = 0$ et $y(t) = \mp\sqrt{\frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}}$ sont des solutions différentes de l'équation différentielle $y' = y^{\frac{1}{3}}$ de même condition initiale $y(0) = 0$.

2. Ceci semble en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité. Expliquez pourquoi ce n'est pas le cas.

Exercice 2 On a vu que la solution explicite de l'équation différentielle logistique $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$ de condition initiale $y(0) = y_0$ est donnée par

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}.$$

Préciser quel est l'intervalle maximal d'existence des solutions de l'équation en discutant selon que $y_0 < 0$, $0 \leq y_0 \leq K$ ou $y_0 > K$.

Exercice 3

1. Pour l'équation différentielle logistique, $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$, vérifier le changement de variable $Y = y/\varepsilon$, où ε est un petit paramètre, transforme l'équation en une équation *presque* linéaire. Expliquer.

2. Que donne ce même changement de variable pour une équation linéaire $y' = a(t)y$?

3. Voyez-vous comment utiliser la première question pour montrer que l'équilibre $y = 0$ de l'équation logistique est un équilibre instable ?

4. Voyez-vous quel changement de variable on pourrait utiliser pour montrer que l'équilibre $y = K$ est un équilibre stable ?

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 + \frac{y}{t} - 9t^2$. Indication : on appelle cette équation une équation de Riccati. Pour résoudre une équation de Riccati, on recherche tout d'abord une solution particulière $y*(t)$. Ici on pourra en rechercher une de la forme $y*(t) = at$. Puis on fait le changement de variable $z = \frac{1}{y-y*}$ qui transforme l'équation en une équation linéaire dont on peut calculer les solutions $z(t)$. On en déduit alors les solutions de l'équation initiale.