NOM : *Corrigé*
PRENOM :

Date : 23 Octobre 2012 .

Systèmes Dynamiques : Feuille-réponses du TD 1
Existence et unicité des solutions

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1

1. Vérifier que $y(t) = 0$ et $y(t) = \mp\sqrt{\frac{8}{27}}t^{\frac{3}{2}}$ sont des solutions différentes de l'équation différentielle $y' = y^{\frac{1}{3}}$ de même condition initiale $y(0) = 0$.

• Si $y(t) \equiv 0$, $y'(t) = 0$ et $(y(t))^{1/3} = 0$ aussi

• Si $y(t) = \sqrt{\frac{8}{27}}\, t^{3/2}$, $y'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}\, t^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, t^{1/2}$
et $(y(t))^{1/3} = \left(\left(\frac{8}{27}\right)^{1/3}\right)^{1/2} t^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} t^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, t^{1/2}$ } d'où l'égalité $y' = y^{1/3}$

Donc $y(t) \equiv 0$ et $y(t) = \sqrt{\frac{8}{27}}\, t^{3/2}$ sont deux solutions de $y' = y^{1/3}$ telles que $y(0) = 0$.

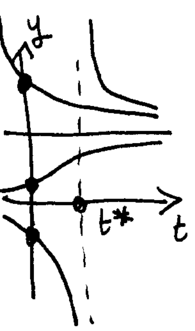
2. Ceci semble en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité. Expliquez pourquoi ce n'est pas le cas.

Le théorème d'unicité n'est pas applicable ici. En effet la fonction $y \longmapsto y^{1/3}$ n'est pas une fonction continuement dérivable en $y = 0$ (en ce point la dérivée ne peut exister car elle serait infinie).

Exercice 2 On a vu que la solution explicite de l'équation différentielle logistique $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$ de condition initiale $y(0) = y_0$ est donnée par

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}.$$

cette fonction n'est pas définie quand $e^{-rt} = \frac{y_0}{y_0 - K}$ donc quand $\boxed{t^* = -\frac{1}{r}\ln\frac{y_0}{y_0-K}}$



Préciser quel est l'intervalle maximal d'existence des solutions de l'équation en discutant selon que $y_0 < 0$, $0 \le y_0 \le K$ ou $y_0 > K$.

• si $y_0 < 0$, la solution $y(t)$ a un pôle en t^*. Elle est définie pour $t \in]-\infty, t^*[$

• si $0 \le y_0 \le K$ la solution $y(t)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• si $y_0 > 0$, la solution a un pôle en t^*. Elle est définie pour $t \in]t^*, +\infty[$.

Exercice 3

1. Pour l'équation différentielle logistique, $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$, vérifier le changement de variable $Y = y/\varepsilon$, où ε est un petit paramètre, transforme l'équation en une équation *presque* linéaire. Expliquer.

Si $\boxed{Y = \frac{y}{\varepsilon}}$ alors $\boxed{y = \varepsilon Y}$ et l'équation différentielle devient :

$$Y' = \frac{y'}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left[ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon} r \varepsilon Y\left(1 - \frac{\varepsilon Y}{K}\right) = rY - \varepsilon r\frac{Y^2}{K}$$

Donc $Y' = rY$ + reste (petit)

C'est pourquoi on peut affirmer que l'équation est presque linéaire si l'on peut négliger le terme $\left(-\varepsilon r\frac{Y^2}{K}\right)$.

2. Que donne ce même changement de variable pour une équation linéaire $y' = a(t)y$?

Le changement de variable $\boxed{Y = \frac{y}{\varepsilon}}$ transforme l'équation $y' = a(t)y$ en la même équation $Y' = a(t)Y$. En effet :

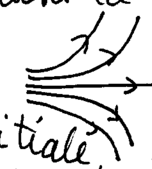
$Y' = \frac{y'}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} a(t)y = \frac{1}{\varepsilon} a(t)\varepsilon Y = a(t)Y$.

L'équation linéaire $y' = a(t)y$ est donc invariable par ce changement de variable.

3. Voyez-vous comment utiliser la première question pour montrer que l'équilibre $y = 0$ de l'équation logistique est un équilibre instable ?

A l'échelle Y (sous la "loupe" $Y = \frac{y}{\varepsilon}$), l'équation est presque égale à l'équation linéaire $Y' = rY$ dont la solution est $Y(t) = Y(0)e^{rt}$

donc, "sous la loupe", on a



$Y=0$ ← solution instable.

Si l'on revient à l'échelle initiale la propriété des solutions proches de s'éloigner de la solution $y=0$ est encore vraie, au moins à proximité de $y=0$. Elle sera donc instable.

4. Voyez-vous quel changement de variable on pourrait utiliser pour montrer que l'équilibre $y = K$ est un équilibre stable ?

Au lieu de poser $Y = \frac{y-0}{\varepsilon}$, on peut poser $\boxed{Y = \frac{y-K}{\varepsilon}}$ pour placer la loupe autour de K (au lieu de la placer autour de 0) - On a :

$Y' = \frac{y'-0}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left[ry\left(1-\frac{y}{K}\right)\right] \underset{\boxed{y=K+\varepsilon Y}}{=} \frac{1}{\varepsilon} r(K+\varepsilon Y)\left(1-\frac{K+\varepsilon Y}{K}\right) = \frac{1}{\varepsilon} r(K+\varepsilon Y)\left(-\frac{\varepsilon Y}{K}\right)$

$Y' = -rY - \varepsilon \frac{rY^2}{K}$

On voit que l'équation est presque égale à l'équation linéaire $Y' = -rY$ qui a pour équilibre $Y=0$ et c'est un équilibre instable.
Comme $Y=0$ correspond à $y = K+\varepsilon 0 = K$, $y=K$ est donc instable.

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 + \frac{y}{t} - 9t^2$. Indication : on appelle cette équation une équation de Riccati. Pour résoudre une équation de Riccati, on recherche tout d'abord une solution particulière $y*(t)$. Ici on pourra en rechercher une de la forme $y*(t) = at$. Puis on fait le changement de variable $z = \frac{1}{y-y*}$ qui transforme l'équation en une équation linéaire dont on peut calculer les solutions $z(t)$. On en déduit alors les solutions de l'équation initiale.

Pour que $y = at$ soit une solution il faut que

$y' = a = (at)^2 + \frac{at}{t} - 9t^2 = (a^2-9)t^2 + a$ et donc que $a = \pm 3$.

Posons $y^*(t) = 3t$ et $\boxed{z = \frac{1}{y-3t}}$ ou encore $\boxed{y = 3t + \frac{1}{z}}$. On obtient

$z' = \frac{-y'+3}{(y-3t)^2} = \frac{-y^2 - \frac{y}{t} + 9t^2 + 3}{(y-3t)^2} = \frac{-(3t+\frac{1}{z})^2 - \frac{3t+\frac{1}{z}}{t} + 9t^2 + 3}{(1/z)^2}$

$z' = -z\left(6t + \frac{1}{t}\right) - 1$ Cette équation linéaire a une sol évidente $z^* = \frac{-1}{6t}$ (qui correspond à $y = -3t$). Donc sa solution est

$z(t) = -\frac{1}{6t} + C\exp(3t^2 + \ln t)$. D'où $y(t) = \frac{1}{z(t)} + 3t = \left(-\frac{1}{6t} + C\exp(3t^2+\ln t)\right)^{-1} + 3t$.