NOM :
PRENOM :

Date : 2012-2013 .

Systèmes Dynamiques : Feuille-réponses du TD 2
Gestion d'une ressource renouvelable

Dans cet exercice on étudie une ressource renouvelable (par exemple des poissons) qui possède une dynamique de type logistique lorsqu'on ne l'exploite pas mais qui est soumise à une exploitation (par pêche par exemple) à un taux que nous allons supposer tout d'abord constant (égal à H) puis proportionnel à la taille de la ressource.

Limitation par quota de pêche : Si la taille de la ressource $y(t)$ évolue au cours du temps selon le modèle

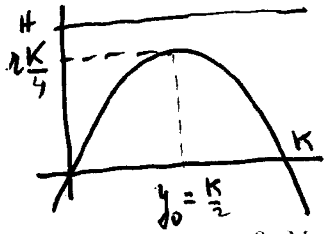
$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - H \qquad (1)$$

où $H > 0$ est une constante, comment choisir cette constante de telle sorte que l'exploitation de la ressource soit aussi rentable que possible sans pour autant conduire à son épuisement par extinction de la population ?

1. Nous savons que le maximum de la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ est atteint en $K/2$. Expliquer pourquoi. C'est aussi le taux de croissance maximum que la population peut atteindre. Combien vaut-il ?

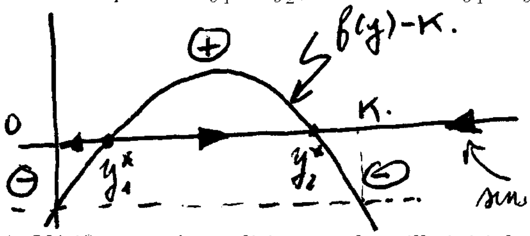
Je vois que f a une parabole pour graphe qui s'annule en 0 et en $y = K$. Son maximum est donc au milieu, en $K/2 = y_0$
Si je n'avais pas vu cela, j'aurais pu faire le calcul
$0 = f'(y_0) = (ry(1-\frac{y}{K}))' = (ry - \frac{r}{K}y^2)' = r - 2\frac{r}{K}y = r(1-\frac{2}{K}y)$ d'où $y_0 = \frac{K}{2}$

2. Montrer que si $H > r\frac{K}{4}$, l'équation ne possède aucun équilibre, c'est-à-dire que quelque soit la taille $y(0)$ de la population initiale, celle-ci diminue jusqu'à 0, ce qui correspond à son extinction.



D'après 1, $f(y) \leq f(\frac{K}{2}) = r\frac{K}{2}(1 - \frac{K}{2}\frac{1}{K}) = r\frac{K}{4}$
Donc $y' = f(y) - H \leq r\frac{K}{4} - H < 0$ si $H > r\frac{K}{4}$
Donc y diminue et il n'y a pas d'équilibre (où $y'=0$) D'où l'extinction.

3. Montrer, en vous aidant du graphe de $f - H$, qu'au contraire si $H < r\frac{K}{4}$, la dynamique présente deux équilibres y_1^* et y_2^*, vérifiant $0 < y_1^* < y_2^*$, le premier étant instable et le second stable.



Je vois que y_2^* est stable et y_1^* est instable

4. Vérifier que, à condition que la taille initiale de la ressource soit supérieure à y_1^*, la population tend vers l'équilibre y_2^*, ce qui implique que, sous cette condition, la ressource est préservée puisqu'elle tend à se stabiliser à la valeur d'équilibre y_2^*.

$t \mapsto y_2^*$ est une solution constante qui ne peut être franchit par une autre solution (unicité des solutions)
Si $y_1^* < y(0) < y_2^*$ $t \mapsto y(t)$ est croissante puisque $y' = f(y) - H > 0$
Elle ne peut franchir y_2^* donc est a une limite qui ne peut qu'être y_2^*.
Si $y(0) > y_2^*$, $t \mapsto y(t)$ est décroissante puisque $y' = f(y) - H < 0$
Elle ne peut franchir y_2^*, elle a donc une limite qui ne peut qu'être y_2^*.

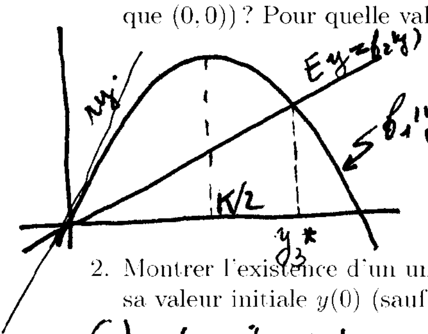
Limitation par effort de pêche : On a vu que dans le modèle précédent, même si l'on s'efforce de ne pas *surexploiter* la ressource en imposant à H de ne jamais dépasser la valeur $r\frac{K}{4}$, la tentation est forte de choisir précisément pour H cette valeur limite (ou de s'en rapprocher au mieux) car c'est elle qui maximise la production et qui est donc le comportement le plus rentable parmi ceux qui n'épuisent pas la ressource. Mais si l'on examine la dynamique dans ce cas limite, on s'aperçoit que le moindre changement de paramètre risque alors de conduire à l'extinction. C'est ce constat qui a conduit le biologiste M.B. Schaefer en 1954 à proposer de limiter l'exploitation de la ressource non pas en imposant un quota de pêche H à ne pas dépasser mais plutot en limitant *l'effort* de pêche E, effort que l'on peut par exemple mesurer par le nombre d'heures passées à pêcher par l'ensemble des bateaux exploitant la ressource. Le taux de pêche est alors proportionnel à la taille de la ressource : d'autant plus faible qu'elle est petite et d'autant plus importante qu'elle est grande. Dans le modèle de Schaefer :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - Ey(t) \qquad (2)$$

l'effort de pêche E apparaît simplement comme un taux de mortalité (par pêche) constant.

1. Tracer sur les graphes des fonctions $f_1(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ et $f_2(y) = Ey$ sur un même graphique (on supposera $0 \leq E \leq r$). Que représente l'abscisse et l'ordonnée de leur point d'intersection (autre que $(0, 0)$) ? Pour quelle valeur de E son ordonnée est-elle maximale ?

NB : $f_1'(0) = r$.



Soit $(y_3^*, f_1(y_3^*)) = (y_3^*, f_2(y_3^*))$ ce point d'intersection. On a $f_1(y_3^*) - f_2(y_3^*) = 0$, donc y_3^* est un équilibre de (2). L'ordonnée $f_1(y_3^*)$ est maximale pour $y_3^* = \frac{K}{2}$.

2. Montrer l'existence d'un unique équilibre stable $y^* > 0$ vers lequel la population tend quelque soit sa valeur initiale $y(0)$ (sauf si elle est nulle).

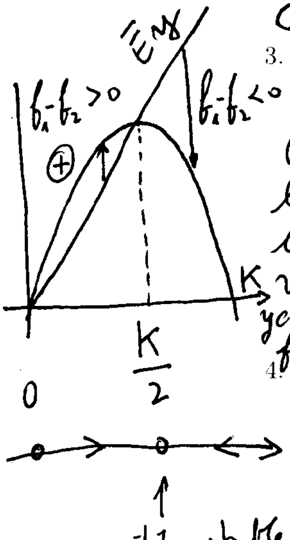
(2) s'écrit $y' = g(y)$ pour $g := f_1(y) - f_2(y) = y(r - \frac{1}{K}y - E)$

Ses équilibres sont donc $y = 0$ et $y_3^* = K(r-1)$.

$g'(y_3^*) = r - E - 2\frac{1}{K}y_3^* = r - E - 2\frac{1}{K}K(r-K) = (r-E)(1-2) = -(r-E) < 0$

Donc y_3^* est un équilibre stable.

3. Vérifier qu'au dela d'un certain effort $\overline{E}$ égal à $r/2$, une augmentation de l'effort ne s'accompagnera pas d'une augmentation de la production. On peut ainsi espérer de cette façon éviter plus sûrement le risque d'épuisement de la ressource.



On raisonne à l'équilibre. Dans ce cas $ry(1-\frac{y}{K}) = Ey$; le premier terme représente la croissance naturelle (production par unité de temps) et le second le prélèvement par unité de temps. A l'équilibre les deux sont bien entendu égaux. Nous avons vu que le premier terme est maximal lorsque $y = \frac{K}{2}$ et sa valeur est alors $r\frac{K}{4}$; y donc $\frac{rK}{4} = f_1(\frac{K}{2}) = f_2(\frac{K}{2}) = \overline{E}\frac{K}{2}$; d'où $\overline{E} = \frac{r}{2}$. Stabilité : calculons $(f_1 - f_2)'(\frac{K}{2})$: $f_1'(\frac{K}{2}) - f_2'(\frac{K}{2}) = (r - 2\frac{r}{K}y - \overline{E})|_{y=\frac{K}{2}} = r(1 - \frac{2}{K}\frac{K}{2} - \frac{1}{2}) = -\frac{r}{2} < 0 \Rightarrow$ stabilité.

4. On suppose que la population est stabilisée à sa valeur d'équilibre stable. On appelle *rendement durable maximal* (*maximal sustainable yield*) de cette population le taux de prélèvement par pêche (qui vaut ici Ey^*) maximal c'est-à-dire celui que l'on obtient en choisissant l'effort de pêche E pour lequel Ey^* est maximal. Calculer ce rendement durable maximal et montrer qu'il est égal au taux de croissance maximal que la population peut atteindre lorsqu'elle n'est pas soumise à la pêche. Cela peut-il se comprendre intuitivement ?

C'est ce qui a été expliqué ci-dessus, en raisonnant à l'équilibre y^*.

On a vu pourquoi il convient de faire en sorte que $y^* = \frac{K}{2}$

Réécrivons le calcul de $(f_2 - f_1)'(y^*)$

On a $(f_1 - f_2)'(y) = (ry - \frac{r}{K}y^2 - \overline{E}y)' = r - \frac{2r}{K}y - \frac{r}{2} = r(\frac{1}{2} - \frac{2}{K}y)$

D'où $(f_1 - f_2)'(y^*) = (f_1 - f_2)'(\frac{K}{2}) = r(\frac{1}{2} - \frac{2}{K}\frac{K}{2}) = -\frac{r}{2} < 0$

ce qui montre que l'équilibre y^* est stable.

(voir ci-dessous un raisonnement géométrique aboutissant à la conclusion)