

NOM :  
PRENOM :

Date : 13 Novembre 2012 .

**Systèmes Dynamiques : Feuille-réponses du TD 3**  
**Etude qualitative de systèmes différentiels**

**Exercice 1** : On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= x(1 - \frac{x}{2}) - \frac{1}{3}xy \\ y' &= y(1 - \frac{y}{2}) - \frac{1}{3}xy. \end{cases} \quad (1)$$

1. Calculer les coordonnées des équilibres du systèmes
2. Tracer, dans le quadrant  $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ , les deux isoclines  $x' = 0$  et  $y' = 0$  et les flèches dans les quatre quadrants qu'elles délimitent.
3. Calculer le linéarisé du champs au voisinage de l'équilibre dont aucune des coordonnées n'est nulle.
4. En déduire la nature de cet équilibre

**Exercice 2 :** Deux entreprises  $X$  et  $Y$  dont les productions à chaque instant  $t$  sont notées  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement, se partagent un marché qui vient de se créer. Elles ne fabriquent pas des produits identiques mais la plupart des consommateurs ayant acheté l'un n'achèteront pas l'autre.

On suppose que la dynamique de croissance de chacune de ces entreprises en l'absence de l'autre est caractérisée par un taux de croissance intrinsèque et un seuil dû aux limitations du marché. On suppose également que la présence de l'autre entreprise introduit pour chacune une diminution du taux de croissance de sa production d'autant plus important que la production de l'entreprise concurrente est importante.

La modélisation de la dynamique des productions des deux entreprises conduit au système dynamique suivant ( $r, s, K, L, k, l, x_0$  et  $y_0$  sont des constantes positives) :

$$\begin{cases} x' &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - kxy \\ y' &= sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) - lxy \end{cases} \quad (2)$$

1. Que représentent les constantes  $K$  et  $L$ ? Quels sont les taux de croissance intrinsèques de chacune des entreprises ?
2. Quelle est la dynamique de l'entreprise  $X$  en l'absence de l'entreprise  $Y$ ? Comment est modélisée l'interaction entre les entreprises ?
3. Lorsque la production de l'entreprise  $Y$  est nulle, indiquer vers quelle valeur d'équilibre tend la production de  $X$  et vérifier que cet équilibre est stable.
4. Dans le cas particulier où  $K = L = 2$ ,  $k = l = \frac{1}{3}$ , et  $r = s = 1$ , calculer le linéarisé de la dynamique au voisinage de l'équilibre dont les deux coordonnées sont non nulle. Pouvez-vous en déduire que, pour ces valeurs des constantes, les deux entreprises pourront survivre durablement toutes les deux ?