Université de Nice — L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013
Département de Mathématiques
NOM : — Date : 20/11/12
PRENOM : — Groupe : .

TD 4 : Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

On considère le système différentiel suivant modélisant la dynamique des deux populations, l'une étant la proie de l'autre :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= 3x(t) - 0.2x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} &= -4y(t) + 0.1x(t)y(t) \end{cases} \tag{1}$$

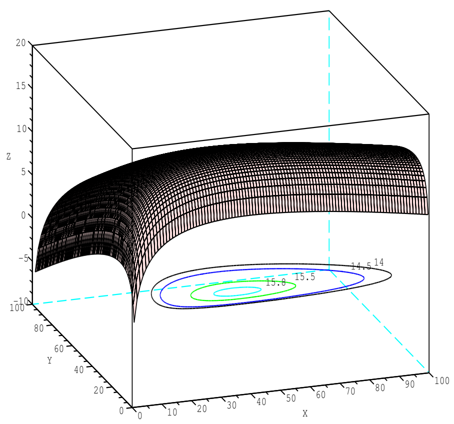
.

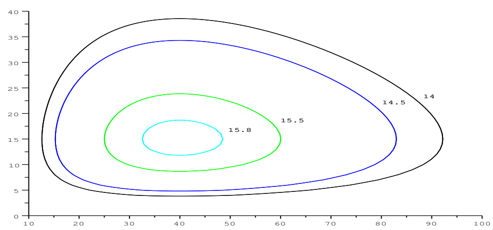
1. Indiquez ce que représente pour chacune des deux populations les coefficients 3 et -4 et aussi ce que représentent les deux autres coefficients.

2. Calculer le linéarisé du système au voisinage de chacun de ses équilibres

3. Peut-on en déduire la nature des équilibre ? Expliquer.

4. On veut étudier la loi de conservation associée à ce système donnée par la fonction $H(x, y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$. Sur la figure suivante sont représentés le graphe de la fonction H et quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.





Calculer l'image M par H du point M' du plan $z = 0$ de coordonnées $M' = (70, 20)$. puis placer ces points sur la figure. Représenter approximativement la courbe de niveau de M sur la figure de droite.

5. Calculer le gradient de H au point M' et tracer ce vecteur sur la figure de droite.

6. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées d'un vecteur tangent à cette courbe au point M' et tracer ce vecteur sur la figure de droite.

7. Sachant que ce vecteur tangent est aussi un vecteur directeur de la droite tangente à cette courbe, calculer une équation de la droite tangente à cette courbe de niveau en ce point.

8. Montrer qu'en tout point (x, y) le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra.

9. Pourquoi dit-on que la fonction H est une loi de conservation du système considéré ?