

**Feuille-question du TD 5**  
**Dynamique des populations : matrices de Leslie**

**Exercice 1** Une scientifique étudie une colonie de souris. Elle note qu'elles produisent en moyenne une fille par femelle pendant leur première année de vie et 8 pendant leur seconde année. Elle note aussi qu'elles sont seulement 25% à survivre une seconde année et aucune ne survivra au delà.

1. Ecrire le système dynamique modélisant cette population de souris en indiquant quelle est la matrice de Leslie  $L$  du système.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Cette matrice est-elle primitive ?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Pour une population initiale de 10 souris, toutes de la première classe d'âge, calculer le nombre de souris dans chaque classes d'âge après 1, après 2, après 3 pas de temps.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. Que pouvez-vous dire de l'évolution du système ?

**Exercice 2 : Une dynamique de saumons** Considérons une population de saumons en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde, et enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 juvéniles au cours de sa deuxième année et à 5 juvéniles au cours de sa troisième année.

1. Si l'on désigne respectivement par  $j_t$ ,  $p_t$  et  $a_t$  les effectifs à l'instant  $t$  des femelles juvéniles, des femelles préadultes (saumons de 1 an) et des femelles adultes (saumons de 2 ans), écrire la dynamique discrète gouvernant cette population et indiquer sa matrice de Leslie  $L$ .
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Sans les calculer, vérifier que les puissances 2 et 3 de  $L$  n'ont respectivement que 4 puis 2 coefficients nuls et en déduire que  $L$  est primitive.

3. Scilab fournit les valeurs suivantes (arrondies à la 2e décimale la plus proche) pour la valeur propre dominante de  $L$  et son vecteur propre associé. Que pouvez-vous en déduire pour la dynamique des saumons ?

**Exercice 3 :** On reprend le même exercice sur une population de saumons femelles mais avec cette fois pour une matrice

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 \\ 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Préciser quel est le sens des 3 coefficients non nuls de cette matrice.
2. Etant donnée une population initiale de 1000 individus pour chacune des 3 classes d'âge, calculer combien y aura-t-il d'individus pour chaque classes d'âge au temps  $t = 1$ , puis aux temps  $t = 2$  et  $t = 3$ . Qu'en déduisez-vous pour sa dynamique pour  $t \geq 3$  ?
3. Pensez-vous qu'on puisse appliquer le théorème de Perron-Frobenius à cette dynamique ?

**Exercice 4 :** A bird species has a maximum life span of 3 years. On average, each pair of birds in their first year will produce 2 offsprings. A typical sample of 8 birds in their 2nd year will produce a total of 15 more offsprings. only 40% of birds in their first year will survive to their 2nd year and only 30% in their 2nd year will survive to their third year. Survival rates do not depend on gender. Describe how this bird population evolves over time. In particular, describe whether the population remains stable, decreases or increases and at what rate. Furthermore, if possible, describe the relative proportions of each age group after a number of years have passed.