Corrigé

Université de Nice
Département de Mathématiques

L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013

NOM : Date : .

PRENOM : Salle et heure : .

Feuille-question du TD 5
Dynamique des populations : matrices de Leslie

Exercice 1 Une scientifique étudie une colonie de souris. Elle note qu'elles produisent en moyenne une fille par femelle pendant leur première année de vie et 8 pendant leur seconde année. Elle note aussi qu'elles sont seulement 25% à survivre une seconde année et aucune ne survivra au delà.

1. Ecrire le système dynamique modélisant cette population de souris en indiquant quelle est la matrice de Leslie L du système.

$$\begin{cases} j_{t+1} = j_t + 8a_t \\ a_{t+1} = 0.25 j_t \end{cases} \quad \text{d'où } L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Cette matrice est-elle primitive ?

L du type $\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ donc $L^2 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} > 0$

donc L est primitive. $(k=2)$.

3. Pour une population initiale de 10 souris, toutes de la première classe d'âge, calculer le nombre de souris dans chaque classes d'age après 1, après 2, après 3 pas de temps.

$X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2.5 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 2.5 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 7.5 \end{pmatrix}$

$N_0 = 10$ $N_1 = 12.5$ $N_2 = 32.5$ $N_3 = 57.5$

4. Que pouvez-vous dire de l'évolution du système ?

Ce système tend vers une distribution d'équilibre (matrice primitive)

$\varphi(\lambda) = \det(L - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0.25 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$

d'où $\lambda = -1$ ou 2 et $\lambda^* = 2$ ← croissante en ~~e^t~~ 2^t.

Exercice 2 : Une dynamique de saumons Considérons une population de saumons en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde, et enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 juveniles au cours de sa deuxième année et à 5 juveniles au cours de sa troisième année.

1. Si l'on désigne respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t des femelles juvéniles, des femelles préadultes (saumons de 1 an) et des femelles adultes (saumons de 2 ans), écrire la dynamique discrète gouvernant cette population et indiquer sa matrice de Leslie L.

$$\begin{cases} j_{t+1} = 4p_t + 5a_t \\ p_{t+1} = 0.53 j_t \\ a_{t+1} = 0.22 p_t \end{cases} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sans les calculer, vérifier que les puissances 2 et 3 de L n'ont respectivement que 4 puis 2 coefficients nuls et en déduire que L est primitive.

L du type $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$; d'où $L^2 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← 4 "0"

$L^3 = L^2 L = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ ↑ 2 "0"

$*$ = un nombre > 0

$L^4 = L^2 \cdot L^2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$

$L^8 = L^4 \cdot L^4 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} > 0$ $k = 8$ convient.

(aucun 0)

$\lambda^* = 1.58$

$V^* = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.32 \\ 0.04 \end{bmatrix}$

3. Scilab fournit les valeurs suivantes (arondies à la 2e décimale la plus proche) pour la valeur propre dominante de L et son vecteur propre associé. Que pouvez-vous en déduire pour la dynamique des saumons ?

La dynamique a une croissance en $C(\lambda^*)^t = C\, e^{t\ln(\lambda^*)}$
et la distribution juvenils, préadultes, adultes tend vers
$\frac{1}{\|V^*\|_1} V^* = \frac{1}{1.31} V^* = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.24 \\ 0.04 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : On reprend le même exercice sur une population de saumons femelles mais avec cette fois pour une matrice

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 \\ 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Préciser quel est le sens des 3 coefficients non nuls de cette matrice.

$L(1,3) = 2000$ est le taux de fécondité des adultes (les autres sont nuls)
$L(2,1) = 0.005$ est le taux de survie des juveniles (qui deviennent pré-adultes)
$L(3,2) = 0,1$ est le taux de survie des préadultes (qui deviennent adultes)

2. Etant donnée une population initiale de 1000 individus pour chacune des 3 classes d'age, calculer combien y aura-t-il d' individus pour chaque classes d'age au temps $t = 1$, puis aux temps $t = 2$ et $t = 3$. Qu'en déduisez-vous pour sa dynamique pour $t \geq 3$?

$L\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 \\ 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 2.10^6 \\ 5 \\ 100 \end{pmatrix}$ $\quad L^2\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.10^5 \\ 10^4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $\quad L^3\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

retour à la population initiale.

On a $L^3 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la dynamiques est 3-périodique.

3. Pensez-vous qu'on puisse appliquer le théorème de Perron-Frobenius à cette dynamique ?

Non puisque L^k vaut L, ou L^2, ou $L^3 = \mathbb{1}$ et qu'aucune de ces matrices est strictement positive.

Exercice 4 : A bird species has a maximum life span of 3 years. On average, each pair of birds in their first year will produce 2 offsprings. A typical sample of 8 birds in their 2nd year will produce a total of 15 more offsprings. only 40% of birds in their first year will survive to their 2nd year and only 30% in their 2nd year will survive to their third year. Survival rates do not depend on gender.

Describe how this bird population evolves over time. In particular, describe whether the population remains stable, decreases or increases and at what rate. Furthermore, if possible, describe the relative proportions of each age group after a number of years have passed.

"in their first year" → juveniles : féconds! $1 \to 1$
"in their second year" → préadultes très féconds $1 \to \frac{15}{8}$
"in their third year" → adultes : stériles! $1 \to 0$

$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{15}{8} & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$

valeurs propres : equation caractéristique : $\det(L - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1.875 & 0 \\ 0.4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda(1-\lambda)+0.75)$

$\lambda = 0$

$\lambda = -0,5$ et $+1.5$

trois vlp : 1.5, -0.5, et 0

$\lambda^* =$ vlp dominante $= 1.5$

$V^* =$ vep "dominant" $= \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.26 \\ 0.05 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{1}{\|V^*\|} V^* = \begin{bmatrix} 0.76 \\ 0.20 \\ 0.04 \end{bmatrix}$ ← distribution d'équilibre