Université de Nice
Département de Mathématiques
L3MASS et L3 Maths, année 2012-2013

NOM : Date : .

PRENOM : Salle et heure : .

Feuille-question du TD 6
Systèmes dynamiques de grande dimension

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la dynamique d'une ou deux quantités en interaction, mais souvent une modélisation réaliste nécessite de considérer la dynamique conjointe d'un grand nombre de grandeurs distinctes. On peut évidement représenter les graphes de chacune des quantités, mais ceci ne permet pas bien de comprendre les interactions. C'est là que les concepts de point d'équilibre, linéarisé à l'équilibre, valeurs propres réelles ou complexes conjuguées aident à la compréhension des interactions. Nous allons ici examiner cette question sur une modélisation (très simplifiée) du métabolisme d'un médicament que l'on peut apporter de manière à maintenir sa présence en quantité constante (et, de préférence, optimale !) alors que son action va agir sur d'autres produits présents : enzymes, protéines, etc...). La molécule apportée est mesuré par x_1 ; celle-ci agit sur la dynamique de trois autres grandeurs x_2, x_3, et x_4 au travers d'une fonction de Michaelis-Menten $m(x) = \frac{Vx}{K+x}$. Le système est donc essentiellement non linéaire, mais nous allons voir comment le linéarisé permet de comprendre la dynamique. Nous étudions tout d'abord le système suivant (les valeurs des constantes figurent ci-dessous) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & V_1 - m(x_1, K_2, V_2) - m(x_1, K_3, V_3) - m(x_1, K_4, V_4) \\ \dot{x}_2 & = & m(x_1, K_2, V_2) - d_2 x_2 \\ \dot{x}_3 & = & m(x_1, K_3, V_3) - d_3 x_3 \\ \dot{x}_4 & = & m(x_1, K_4, V_4) - d_4 x_4 \end{array}\right. \tag{1}$$

avec pour les constantes $d2 = 0.525$; $d3 = 0.578$; $d4 = 0.4621$; $V1 = 0.2$; $K2 = 12.7$; $V2 = 60$; $K3 = 3$; $V3 = 11.15$; $K4 = 11.2$; et $V4 = 22.9$.

1. Montrer que les trois fonctions $m(x)$ sont strictement croissantes en déduire que $x_1' = 0$ a une solution et une seule $x_1^* > 0$.

2. En déduire que le système n'a qu'un seul équilibre $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$.

3. Calculer la matrice jacobienne du système.

4. Montrer que toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement négatives.

5. En déduire que l'équilibre du système est stable et esquissez les graphes des 4 solutions pour t assez grand.

6. On observe que x_1 converge très rapidement vers sa limite. Pouvez-vous l'expliquer ?

7. Observons que le fait que x_1 converge rapidement vers sa limite a pour effet de découpler les trois autres composantes x_2, x_3 et x_4 qui agissent alors sur elle-même seulement de manière "destructive" (terme en $-dx_i$. Supposons à présent qu'au contraire les composantes x_3 et x_4 interagissent, x_4 de manière antagoniste sur x_3, mais x_3 de manière agoniste sur x_4 comme dans le système ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & V_1 - m(x_1, K_2, V_2) - m(x_1, K_3, V_3) - m(x_1, K_4, V_4) \\ \dot{x}_2 & = & m(x_1, K_2, V_2) - d_2 x_2 \\ \dot{x}_3 & = & m(x_1, K_3, V_3) - d_3 x_4 \\ \dot{x}_4 & = & m(x_1, K_4, V_4) + d_4 x_3 \end{array}\right. \tag{2}$$

Représenter approximativement la dynamique dans le plan des deux variables (x_1, x_2) (On pourra calculez les valeurs propres du sous-système pour déterminer la nature de l'équilibre).

8. Représentez approximativement la dynamique dans le plan des deux variables (x_3, x_4)

9. Envisageons maintenant que la composante x_2 ait une action agoniste sur elle même, et non antagoniste : nous changeons en "+" le "-" de son équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & V_1 - m(x_1, K_2, V_2) - m(x_1, K_3, V_3) - m(x_1, K_4, V_4) \\ \dot{x}_2 & = & m(x_1, K_2, V_2) + d_2 x_2 \\ \dot{x}_3 & = & m(x_1, K_3, V_3) - d_3 x_4 \\ \dot{x}_4 & = & m(x_1, K_4, V_4) + d_4 x_3 \end{array}\right. \tag{3}$$

Que pouvez-vous dire de la dynamique des 4 variables dans ce cas ?