II2 sujet 1

(i) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$g(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = \text{Arcsin}\, x$

$g'(x) = 2u'(x)\,u(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{Arcsin}\, x$

$h(x) = \text{Arctan}\, v(x)$ $\quad v(x) = x^2$

$h'(x) = \dfrac{v'(x)}{1+(v(x))^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}$

(ii) $\text{Arctan}\sqrt{3} =$ le $x \in]-\frac{\pi}{2}, \pi/2[$ tq

$\tan x = \sqrt{3}$ $\quad \boxed{x = \pi/3 = \text{Arctan}\sqrt{3}}$

$\text{Arccos}\, 1/2 =$ le $x \in [0, \pi]$ tq

$\cos x = 1/2$ $\quad \boxed{\text{Arccos}\, x = \pi/3}$

$\boxed{\text{Arccos}(\cos(-\pi/3)) = \text{Arccos}(\cos \pi/3) = \pi/3}$

(III) 1. $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ 1+3x > 0\}$

$=]-1/3, +\infty[$.

2. f continue sur $]-1/3, +\infty[$

dérivable et $f'(x) = \dfrac{3}{1+3x} > 0$

sur D_f : f strictement croissante

sur D_f. De plus

$\lim\limits_{x \to -1/3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

CCL: f Bijection de D_f sur $\mathbb{R}$

3. $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$

$f(x) = y$: $\ln(1+3x) = y$

donc $e^y = 1+3x$

et $x = \dfrac{e^y - 1}{3} = f^{-1}(y)$

IV

1. $D_f = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$= x(x+2)e^x$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{-\infty} f(x) = 2$

(croissances comparées).

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f	2	$\nearrow$	$4e^{-2}+2$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Asymptote horizontale d'équation $y=2$ en $-\infty$. $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

donc pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

3. $f(0) = 2 \qquad f(1) = e+2 > 3$

donc (TVI, f continue)

$f(x)=3$ admet une solution ds $[0,1]$.

Comme $4e^{-2}+2 < 3$, cette equation n'admet pas d'autre solution sur $\mathbb{R}$.

4. f CROISSANTE sur $[0,+\infty[$

et $f([0,+\infty[) = [2,+\infty[$.

$\rightarrow$ $f : [0,+\infty[\rightarrow [2,+\infty[$ Bijection

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$(f^{-1})'(e+2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e+2))} = \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{3e}$$

5. $$f''(x) = 2e^{x} + 2xe^{x} + 2xe^{x} + x^2e^{x}$$

$$= (x^2+4x+2)e^{x}.$$

$f''(x)$ s'annule et change de signe si

$x^2+4x+2=0$ i.e $x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2}$, $x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2}$

qui sont des points d'inflexion.