L1 Maths 2018-2019, Compléments Maths 2
Feuille d'exercices numéro 2 BIS : exercices supplémentaires sur le calcul intégral

Exercices à faire chez vous (éventuellement en TD si le temps le permet). Les deux derniers sont plus difficiles.

I. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt$.

II. Soit F la fonction définie sur lintervalle $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$.
1. Dire pourquoi F est dérivable et calculer $F'(x)$. En déduire que F est croissante.
2. Calculer $\int_1^x e^{-t}dt$.
3. Montrer que $F(x) \leq \int_1^x e^{-t}dt$. En déduire que F est majorée.
4. La fonction F a-t-elle une limite quand $x \to +\infty$?

III. Soit $x \in]0, 1]$. En utilisant une intégration par parties, calculer $G(x) = \int_x^1 \ln(t)dt$. Montrer que la fonction G a une limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

IV. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et k, ℓ deux réels non nuls.
1. En posant $x = kt$, calculer $\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2} dx$.
2. En posant $x = t + \ell$, calculer $\int_a^b \frac{1}{(x-\ell)^2+k^2} dx$.

V. En posant $x = \tan t$, calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

VI. On pose, pour $n \geq 0$,

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1. Montrer que, pour tout réel t,

$$(1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

2. En déduire que

$$S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

3. Montrer que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$. En déduire une majoration de $|S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt|$ puis que la suite (S_n) est convergente. Que vaut sa limite?

VII. 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

(Indication : crire la formule pour $n = 1$ et $n = 2$ pour voir comment cela se passe; puis récurrence et intégration par parties).

2. *Applications :* en appliquant la formule précédente à la fonction exponentielle sur $[0,1]$, majorer

$$|e-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}|.$$

Ecrire le nombre e comme limite d'une suite.

VIII. Soit n un entier et x un réel positif. On définit

$$I_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt.$$

1. Calculer $I_0(x)$. Déterminer pour $n>0$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.
2. Calculer $J_0=\lim_{x\to+\infty} I_0(x)$ puis $J_n=\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ pour $n\geq 1$.