Analyse L1 (groupe M2), 2016-2017, Feuille de td numéro 1

I. Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses?
1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n > 3)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n > 6)$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n \leq 6)$.

II. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses?
1. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5).

III. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses?
1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$.
2. Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.
3. Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.

IV. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est croissante si "étant donnés deux élements quelconques de I, leurs images par f sont rangées dans le même ordre".
1. Traduire cette définition avec des quantificateurs.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x + 1$. Montrer que f est croissante. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = x^2$. Est-elle croissante?

V. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
1. Rappeler la définition de "f injective". Traduire cette définition à l'aide de quantificateurs.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 8x - 3$. Montrer que f est injective.
3. Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective.
4. Remplacer "injective" par "surjective" dans les questions précédentes.

VI. Donner la négation mathématique des phrases suivantes:
1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. la fonction f est positive, c'est-à-dire "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$".

VII. Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et, pour un étudiant x, $h(x)$ son heure de réveil le jour j.
1. Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition "Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ".
2. Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en françcais.

VIII. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(2k + 1) = (n + 1)^2$.

IX. Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré ou minoré. Lorsque c'est possible, en donner la borne supérieure et la borne inférieure et déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum:

$A =]-3,1] \cup]0,2]$, $B =]-\infty,1] \cap [1,+\infty[$, $C = [0,1[\cup [2,3[$, $D =]-\infty,3[\cap [2,4[$, $E =]-\infty,3] \cap]-1,+\infty[$