L2 MATHS 2018-2019, Option Mathématiques 3

Feuille d'exercices numéro 1. Fonctions logarithmes, fonctions exponentielles et équations différentielles linéaires.

Exercice I. *Fonction logarithme néperien et croissances comparées*
1. Rappeler la définition de $\ln(x)$, $x > 0$.
2. Montrer que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$ (dériver la fonction $x \mapsto \ln(xy) - \ln(x)$).
3. En déduire que $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
4. Montrer que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
5. Montrer finalement que ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note exp sa fonction réciproque.
6. Calculer $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ pour $x \geq 1$.
7. Montrer que $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ pour tout $x \geq 1$.
8. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ puis que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

Exercice II. *Problème de Cauchy*
On s'intéresse aux fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$y' = y \text{ et } y(0) = 1 \tag{1}$$

1. Montrer que si y vérifie (1) alors $y(x)y(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si y vérifie (1) alors $y(x + a) = y(x)y(a)$ pour tous $x, a \in \mathbb{R}$ (dériver $x \mapsto \frac{y(x+a)}{y(x)}$).
3. Montrer que si y_1 et y_2 vérifient (1) alors elles sont égales (dériver $x \mapsto \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$). Conclusion ?

Exercice III. *Fonction exponentielle*
1. Montrer que exp est l'unique solution du problème (1) de l'exercice **II.**
2. Montrer que $\exp(x + a) = \exp(x)\exp(a)$ pour tous $x, a \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
4. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
3. Plus généralement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \geq 0$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^r}$ si $r \in \mathbb{N}^*$.

Exercice V. *Equations différentielles linéaires d'ordre* 1
1. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + x$. Déterminer la solution qui prend la valeur 0 en 1.

Exercice VI. *Equations différentielles linéaires d'ordre* 1
1. Résoudre l'équation différentielle $y' = (x+1)(y+1)$.
2. Déterminer la solution qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice VII. *Variation de la constante*
1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' = y + x^2e^x$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = y + \cos(x)$. Déterminer la solution qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 0.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2xy + x^3$.

Exercice VIII. *Problème de raccord*
1. Résoudre l'équation différentielle $y' = \frac{2y}{x} + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Trouver une solution de cette équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0. Cette solution est-elle unique ?

Exercice IX. *Problème de raccord (bis)*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' = y$.

Exercice X. *Equations différentielles linéaires d'ordre* 2
1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ puis $y'' + 4y' + 4y = 4$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$ puis $y'' + y = x$. déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice XI. *Changement de variable*
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y'' + xy' - y = 0$ en utilisant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Exercice XII. *Preuve d'un théorème du cours*
Soient a et b deux nombres réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle (E) $y'' + ay' + by = 0$ On suppose dans cet exercice que l'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{2}$$

a *deux racines réelles distinctes*, que l'on notera r_1 et r_2.
1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$. Montrer que y est solution de (E).
2. Soit y une solution de (E). On écrit $y(x) = C(x)e^{r_1 x}$ où C est une fonction (au moins) deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction C' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Résoudre cette équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire la fonction C puis qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclusion ?