M1 Enseignement de Mathématiques, 2017-2018
Analyse 2, feuille III

Suites et séries de fonctions

I. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.
1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite simple, notée f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f est-elle dérivable à l'origine? Moralité?

II. 1. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}xe^{-nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = n^2xe^{-nx}$.
a. Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge simplement, mais pas uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.
b. Calculer $\int_0^1 g_n(t)dt$ puis $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)dt$.

III. (La somme d'une série de fonctions continues n'est pas toujours continue)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(1-x)^n$.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 2[$. On note f sa somme.
2. Calculer f et montrer que f n'est pas continue en 0.

IV. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

V. 1. Montrer que la série $\sum xe^{-n^2x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Séries entières

VI. *D'après la première épreuve 2006*
1. Montrer que $\sum(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$ $(n \geq 1)$ converge simplement sur $]-1, 1]$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est dérivable sur $]-1, 1[$. Calculer S' sur $]-1, 1[$ et en déduire une expression de S sur cet intervalle.
3. Montrer que S est en fait continue sur $]-1, 1]$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

VII. a. Rayon de convergence de $\sum \frac{n^n}{n!}z^n$, $\sum a^{\sqrt{n}}z^n$ $(a > 0)$, $\sum n^{\ln n}z^n$, $\sum(1 + a^n)z^n$, $\sum P(n)z^n$ (P est une fonction polynomiale), $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$.

VIII. *Deuxième épreuve 2008*
a. Montrer la convergence de $\sum \frac{r}{2^r}$.

b. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \frac{x^n}{2^n}$. En considérant la série dérivée, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

IX. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]-R, R[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
1. Exprimer a_n en fonction de f et de ses dérivées.
2. On suppose que $f(x) = g(x)$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $a_n = b_n$.
3. Soit $x \in [0, R[$. Exprimer $\int_0^x f(t)dt$ comme somme d'une série entière.
4. Montrer que quel que soit l'entier $n \geq 0$ la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.

X. Développer en série entière $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \cos(x)$.

XI. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$y' + xy = 1$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$. Montrer qu'il existe des sommes de séries entières solutions de cette équation différentielle. En déduire que f est développable en série entière.

XII. (*Vers les séries de Fourier*)
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.
1. Montrer que la série $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme. Montrer que f est périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(px) dx$ pour $p > 0$ et $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$.