Notes sur les systèmes de Gauss-Manin algébriques et leurs transformés de Fourier

PAR ANTOINE DOUAI *

1 Introduction

Soit U une variété affine lisse de dimension $n \geq 2$ et $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ une fonction régulière. On note $\mathcal{M}^{(i)} := \mathcal{H}^i(f_+\mathcal{O}_U)$ les modules de cohomologie de l'image directe $f_+\mathcal{O}_U$, appelés *systèmes de Gauss-Manin* de f et $M^{(i)} = \Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{M}^{(i)})$. Les résultats généraux sur les images directes [Bo] montrent que $M^{(i)} = 0$ pour $i \notin [-n, 0]$ et que, pour tout $i \in [-n, 0]$, $M^{(i)}$ est un module holonome, régulier (y compris à l'infini) sur l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$. Ces modules apparaissent naturellement lorsque l'on étudie certains types d'intégrales : les intégrales oscillantes, définies par exemple par Pham [Ph1], mais aussi les intégrales de périodes hypergéométriques, considérées dans [S]. Ces intégrales sont solutions de modules holonomes qui s'obtiennent à partir des modules $M^{(i)}$ via une transformation de Fourier, dans le premier cas, ou une transformation de Mellin, dans le second. Signalons aussi leur interêt topologique : par exemple, si $U = \mathbb{A}^n$, on a $DR(\mathcal{M}^{(i)}) = (R^{n+i-1}f_*^{an}\mathbb{C}_{U^{an}})[1]$ et on peut ainsi obtenir des informations sur la topologie (des fibres) de f. Ce dernier aspect est détaillé dans [D], [DS], [DS1], [S].

Le but de ces notes est d'étudier les modules $M^{(i)}$ en prenant pour modèle la situation locale telle qu'elle est traitée par Pham et Malgrange [Ph], [M1] et de préciser les résultats déjà connus.

Nous supposons dans un premier temps que f n'a que des points critiques isolés sur U. Un des ingrédients pour comprendre les modules $M^{(i)}$ est la la filtration par "l'ordre des pôles" que nous définissons au paragraphe 3.1. Comme U est affine, on peut utiliser le lemme de de Rham généralisé (lemme 3.0.1) pour décrire les propriétés de cette filtration croissante, notée $F_\bullet$. Elle vérifie $F_kM^{(i)} = M^{(i)}$ pour $i < 0$ (proposition 3.3.1) et, sur $M^{(0)}$, elle possède les propriétés attendues (si l'on se réfère au cas local) : par exemple, ∂_t est strict pour $F_\bullet$ (*i.e* $Im\partial_t \cap F_{p+1}M^{(0)} = \partial_t F_p M^{(0)}$) et $dim_{\mathbb{C}} gr_p^F M^{(0)} = \mu$ pour tout $p \geq 0$, μ désignant le nombre de Milnor global de f (paragraphe 3.2). Notons cependant que $F_pM^{(0)}$ n'est pas toujours de type fini sur $\mathbb{C}[t]$ (voir remarque 3.2.4 et paragraphe 4.1) et que l'on a seulement $\partial_t F_p M^{(0)} \subset F_{p+1}M^{(0)}$ en général, l'égalité n'étant vraie que si $dim_{\mathbb{C}} H^n(U^{an}, \mathbb{C}) = 0$. On a néammoins toujours $M^{(0)} = \cup_{i\in\mathbb{N}} \partial_t^i F_0 M^{(0)}$. $F_0M^{(0)}$ est appelé *module de Brieskorn* : il est étudié par le menu dans [S], [DS1]. De ce qui précède, nous déduisons que $F_\bullet$ est une bonne filtration si et seulement si $F_0M^{(0)}$ est de type fini sur $\mathbb{C}[t]$. Au paragraphe 3.3, nous montrons comment cette filtration permet d'établir un lien entre les modules $M^{(i)}$ et les groupes de cohomologie de complexes de de Rham relatifs.

*Antoine Douai, Laboratoire J.A Dieudonné, UMR 6621, Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2 FRANCE. E-mail : douai@math.unice.fr Mots clés : Système de Gauss-Manin, transformation de Fourier. Classification AMS : 32S40.

Si l'on veut pousuivre l'analogie avec la situation locale, on peut se demander à quelles conditions on a $M^{(i)}=0$ pour $i\neq -n+1,0$. De même, l'opérateur ∂_t est-il toujours bijectif sur $M^{(0)}$? Sinon quel est son noyau, son conoyau ? Si $U=\mathbb{A}^n$ et si l'on suppose que f a des points critiques isolés sur $\mathbb{A}^n$, un calcul élémentaire (paragraphe 3.2.2) montre que ∂_t est inversible sur $M^{(i)}$ pour $-n+2\leq i\leq 0$. Mais si l'on veut par exemple montrer que $M^{(i)}=0$ pour $i\neq -n+1,0$ il est nécessaire d'imposer de plus une condition de modération à la fonction f : c'est ce qui ressort de l'article fondateur [S] où sont considérées des fonctions *cohomologiquement modérées*.

Plus généralement, nous supposons que f est à singularités isolées y compris à l'infini au sens de [DS, paragraphe 3], [DS1]. En particulier, f n'a que des points critiques isolés sur U. Il s'avère que, dans cette situation, les modules $M^{(i)}$ sont libres sur $\mathbb{C}[t]$ pour $i<0$ parce que les faisceaux $(R^{n+i-1}f_*^{an}\mathbb{C}_{U^{an}})[1]$ sont pervers (c'est ce qui motive l'hypothèse faite sur f), de rang égal à $dim_{\mathbb{C}}H^{n-1+i}(U^{an},\mathbb{C})$. Par exemple, si $U=\mathbb{A}^n$, on retrouve le fait bien connu que $M^{(i)}=0$ pour $i\neq -n+1,0$ [D, chapitre 5]. Si f est à singularités isolées y compris à l'infini, il ne reste donc plus qu'à comprendre le module $M^{(0)}$. Pour répondre complètement aux questions posées plus haut, nous calculons la cohomologie des complexes de de Rham algébriques

$$0\rightarrow M^{(i)}\xrightarrow{\partial_t} M^{(i)}\rightarrow 0$$

Si $i=0$, nous montrons en particulier que $dim_{\mathbb{C}}ker(\partial_t : M^{(0)}\rightarrow M^{(0)})=dim_{\mathbb{C}}H^{n-1}(U^{an},\mathbb{C})$ et $dim_{\mathbb{C}}coker(\partial_t : M^{(0)}\rightarrow M^{(0)})=dim_{\mathbb{C}}H^{n}(U^{an},\mathbb{C})$. Tout ceci nous permet d'évaluer le rang des groupes de cohomologie des complexes de de Rham relatifs évoqués ci-dessus : de cette manière, on généralise les résultats de [BD], obtenus dans le cas où $U=\mathbb{A}^n$ (corollaire 4.2.4).

Les résultats précédents permettent de comprendre les transformés de Fourier des modules $M^{(i)}$ (et s'appliquent donc à l'étude des intégrales oscillantes) : ceci fait l'objet de la deuxième partie de ces notes. Le cas $i<0$ est immédiatement réglé. Si $i=0$, nous montrons par exemple que le rang de $M^{(0)}$ et celui de son transformé de Fourier $G^{(0)}$ sont liés par la relation $rgG^{(0)}=rgM^{(0)}+dim_{\mathbb{C}}H^n(U^{an},\mathbb{C})-dim_{\mathbb{C}}H^{n-1}(U^{an},\mathbb{C})$. Comme on connaît précisément le rang de $M^{(0)}$ (un nombre de betti d'une fibre générique), on déduit de la formule précédente le rang de $G^{(0)}$ (c'est le "nombre de cycles évanescents", théorème 5.2.3). Ceci permet d'illustrer et de retrouver un résultat général de Brylinski [Br, corollaire 8.3] . L'exemple typique est celui de Barannikov (exemple 5.2.5) [Ba] où $U^{an}=(\mathbb{C}^*)^n$: c'est un cas pour lequel $rgG^{(0)}\neq rgM^{(0)}$. Chemin faisant, nous rappelons comment construire le "transformé de Fourier" du $\mathbb{C}[t]$-module $F_0M^{(0)}$ (paragraphe 5.1). Nous montrons que l'on obtient ainsi un réseau du localisé de $G^{(0)}$ si et seulement si f est cohomologiquement modérée (corollaire 5.2.6). Enfin, nous discutons de la régularité à l'infini du transformé de Fourier du système de Gauss-Manin $M^{(0)}$.

Le dernier paragraphe est consacré à l'étude des analytisés $\mathcal{M}^{(i),an}$. Nous définissons en particulier (suivant une idée d'Alexandru Dimca) un (le) spectre du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}_a^{(0),an}$ $(a\in S)$.

La plupart des résultats présentés ici sont vraisemblablement, selon l'expression consacrée, "bien connus des spécialistes". Cependant, ils sont soit absents (à ce qu'il me semble) de la littérature, soit déduits de théorème généraux (théorème 5.2.3 iii), corollaire 3.3.2 iii)). Dans ce dernier cas, l'objectif était de donner des preuves élémentaires, qui tiennent compte des spécificités de la situation considérée. Enfin, il faut remarquer que si l'on considère $f:U\rightarrow S$ où S est plus généralement affine de dimension 1, la situation est bien plus compliquée (même si les résultats du paragraphe 3 restent vrais), essentiellement parce que les faisceaux $R^if_*^{an}\mathbb{C}_{U^{an}}$ ne sont plus constants pour

$i < n-1$ (paragraphe 7).

Je tiens à remercier C. Huygue et C. Hertling : leurs questions sont à l'origine de ces notes.

Conventions. Pour simplifier les notations, nous écrirons $H^i(U)$ pour $H^i(U^{an}, \mathbb{C})$, $h^i(U)$ pour $dim_{\mathbb{C}} H^i(U^{an}, \mathbb{C})$ et S pour $\mathbb{A}^1$.

2 Systèmes de Gauss-Manin algébriques

2.1

Soit U une variété affine lisse de dimension $n \geq 2$ et $f : U \to S$ une fonction régulière. Soit $\Omega^p(U)$ l'espace des p-formes régulières sur U. Le complexe de Gauss-Manin est le complexe

$$(\Omega^{\bullet+n}(U)[\partial_t], d_f)$$

où la différentielle d_f est définie par

$$d_f(\sum_i \omega_i \partial_t^i) = \sum_i d\omega_i \partial_t^i - \sum_i df \wedge \omega_i \partial_t^{i+1}.$$

Les *systèmes de Gauss-Manin* de la fonction f sont les groupes de cohomologie $M^{(i)}$ du complexe précédent. Ce sont des $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$-module holonomes, réguliers (même à l'infini) [Bo, p.308], l'action de t et ∂_t provenant de celle définie sur $\Omega^{\bullet+n}(U)[\partial_t]$ par

$$t(\sum_i \omega_i \partial_t^i) = \sum_i f\omega_i \partial_t^i - \sum_i i\omega_i \partial_t^{i-1}$$

et

$$\partial_t(\sum_i \omega_i \partial_t^i) = \sum_i \omega_i \partial_t^{i+1}.$$

On notera par la suite $M := M^{(0)}$.

3 Filtration par l'ordre des pôles

Nous ferons grand usage du lemme qui suit. Faute de références précises, nous en donnons la preuve.

Lemme 3.0.1 ***(Lemme de de Rham généralisé)*** *Si U est affine et si f a au plus des points critiques isolés sur U le complexe $(\Omega^\bullet(U), df \wedge)$ n'a de cohomologie qu'en degré n et le n-ième groupe de cohomologie de ce complexe, $\Omega^n(U)/df \wedge \Omega^{n-1}(U)$, est un espace vectoriel de dimension finie μ, la somme des nombres de Milnor des points critiques de f.*

Preuve. On montre tout d'abord la version analytique de ce résultat, c'est à dire pour le complexe $(\Omega^\bullet(U^{an}), df^{an} \wedge)$. Comme U^{an} est de Stein, la cohomologie de ce complexe est égale à l'hypercohomologie du complexe de faisceaux $(\Omega^\bullet_{U^{an}}, df^{an}\wedge)$. Le support des faisceaux de cohomologie de ce complexe étant contenu dans l'ensemble des points critiques (isolés) de f^{an}, on a $\mathbb{H}^i(U^{an}, (\Omega^\bullet_{U^{an}}, df^{an}\wedge)) = \oplus_c H^i(\Omega^\bullet_{U^{an},c}, df^{an}\wedge)$, c parcourant les points critiques de f^{an}. Les résultats généraux sur les complexes de Koszul montrent que $H^i(\Omega^\bullet_{U^{an},c}, df^{an}\wedge) = 0$ pour $i \neq n$ et on a $dim_{\mathbb{C}} H^n(\Omega^\bullet_{U^{an},c}, df^{an}\wedge) = \mu_c$ (μ_c nombre de Milnor de f^{an} au point critique c). Ceci donne le résultat. Comme U est affine, la cohomologie du complexe $(\Omega^\bullet(U), df\wedge)$ est égale à l'hypercohomologie du complexe de faisceaux $(\Omega^\bullet_U, df\wedge)$ et on a une décomposition en somme directe comme ci-dessus. Le lemme résulte alors de [Se]. $\square$

Notons $DR(U)$ le complexe de de Rham

$$\cdots \to \Omega^i(U) \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}(U) \to \cdots$$

Le résultat qui suit est classique (théorème de Grothendieck).

Lemme 3.0.2 *Si U est affine on a, pour tout i, $H^i(DR(U)) = H^i(U)$.*

Preuve. Comme ci-dessus, on identifie la cohomologie du complexe $(\Omega^\bullet(U), d)$ à l'hypercohomologie du complexe de faisceaux $(\Omega^\bullet_U, d)$. Il suffit alors d'utiliser [Bo, exemple p.171]. $\square$

3.1 Définitions

Le complexe $(\Omega^{\bullet+n}[\partial_t], d_f)$ est muni d'une filtration croissante $F_\bullet$, définie par

$$F_p\Omega^{\bullet+n}[\partial_t] = \Omega^{\bullet+n}[\partial_t]_{\leq p+\bullet},$$

la filtration sur le terme de droite étant celle par le degré en ∂_t. On définit, pour tout $p \geq -i$, les $\mathbb{C}[t]$-modules

$$F_pM^{(i)} = image\ (F_p\Omega^{i+n}[\partial_t] \to M^{(i)}).$$

Sur $M := M^{(0)}$, on a ainsi

$$F_0M = \frac{\Omega^n(U)}{d_f(\Omega^{n-1}(U)[\partial_t]) \cap \Omega^n(U)}.$$

Ce $\mathbb{C}[t]$-module est appelé *module de Brieskorn.*

3.2 Propriétés

3.2.1

Lemme 3.2.1 *Si f n'a que des points critiques isolés sur U affine, on a*

$$d_f(\Omega^{n-1}(U)[\partial_t]) \cap \Omega^n(U) = d_f(df \wedge \Omega^{n-2}(U)) = df \wedge d\Omega^{n-2}(U)$$

et, pour tout $p \geq 1$,

$$d_f(\Omega^{n-1}(U)[\partial_t]) \cap (\sum_{i=0}^{p} \Omega^n(U)\partial_t^i) = d_f(\sum_{i=0}^{p-1} \Omega^{n-1}(U)\partial_t^i).$$

En particulier,

$$F_0M = \Omega^n(U)/df \wedge d\Omega^{n-2}(U).$$

Preuve. Les inclusions $\supset$ sont évidentes. Les inclusions $\subset$ proviennent du lemme 3.0.1 . $\square$

Sur M, on complète la définition précédente en posant

$$F_{-2}M = \frac{\{df \wedge \omega, d\omega = df \wedge \eta, \omega \in \Omega^{n-1}(U)\}}{df \wedge d\Omega^{n-2}(U)}$$

et

$$F_{-1}M = \frac{df \wedge \Omega^{n-1}(U)}{df \wedge d\Omega^{n-2}(U)}.$$

On a ainsi

$$F_{-2}M \subset F_{-1}M \subset F_0M \subset \cdots \subset F_pM \subset \cdots$$

avec $\cup_p F_pM = M$ et $\partial_t F_pM \subset F_{p+1}M$ pour tout $p \geq -2$. On obtient donc une filtration de M par des $\mathbb{C}[t]$-sous-modules.

Sur $M^{(i)}$, $i < 0$, on a de la même manière,

$$F_{-i}M^{(i)} \subset F_{-i+1}M^{(i)} \subset \cdots ,$$

$\partial_t F_pM^{(i)} \subset F_{p+1}M^{(i)}$ pour tout $p \geq -i$ et $\cup_p F_pM^{(i)} = M^{(i)}$.

3.2.2

On suppose maintenant, et jusqu'à la fin du paragraphe 3.2, que f n'a que des points critiques isolés sur U. Le reste de ce paragraphe est consacré à l'étude du comportement de ∂_t vis-à-vis de la filtration $F_\bullet$, définie sur M dans un premier temps.

On commence par évaluer les espaces vectoriels $ker(\partial_t : M \to M)$ et $coker(\partial_t : M \to M)$. Un calcul direct montre les faits suivants :

a. Surjectivité de ∂_t : soit $\omega = \sum_i \omega_i \partial_t^i \in M$. A quelles conditions existe-t-il $\eta = \sum_i \eta_i \partial_t^i \in M$ telle que $\omega = \partial_t \eta$? Bien sûr, $\sum_{i \geq 1} \omega_i \partial_t^i = \partial_t(\sum_{i \geq 1} \omega_i \partial_t^{i-1})$ donc il suffit de considérer le problème avec $\omega = \omega_0 \in F_0M$. Si $\omega_0 = \partial_t(\sum_i \eta_i \partial_t^i) + d_f(\sum_j \alpha_j \partial_t^j)$ alors on a immédiatement $\omega_0 = d\alpha_0$, c'est à dire que ω_0 est exacte. Réciproquement, si $\omega_0 = d\alpha_0$ alors $\omega_0 = \partial_t df \wedge \alpha_0 + d_f(\alpha_0)$. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.0.2, on obtient

$$dim_{\mathbb{C}} coker(\partial_t : M \to M) = h^n(U).$$

b. Injectivité de ∂_t : un calcul analogue au précédent montre que $\omega \in M$ vérifie $\partial_t \omega = 0$ si et seulement si ω est cohomologue à $-df \wedge \eta$ avec $d\eta = 0$. On vérifie, en utilisant le lemme 3.0.1, que $-df \wedge \eta$ est cohomologue à 0 dans M si et seulement si il existe une $n-2$-forme telle que $df \wedge \eta = df \wedge d\alpha$. On en déduit

$$ker(\partial_t : M \to M) = \frac{\{df \wedge \eta, \eta \in \Omega^{n-1}, d\eta = 0\}}{df \wedge d\Omega^{n-2}}.$$

Via $df\wedge$, ce quotient est isomorphe à

$$\frac{Z(\Omega^{n-1})}{(df\wedge\Omega^{n-2})\cap Z(\Omega^{n-1})+d\Omega^{n-2}}$$

avec $Z(\Omega^{n-1})=\{\eta\in\Omega^{n-1},d\eta=0\}$, et ainsi

$$dim_{\mathbb{C}}ker(\partial_t:M\to M)\leq h^{n-1}(U)$$

en utilisant une nouvelle fois le lemme 3.0.2.

En particulier, si $U=\mathbb{A}^n$, ∂_t est bijective. Mais si $U=(\mathbb{C}^*)^n$, elle ne l'est pas.

Pour $i<0$ le même type de raisonnement montre que

$$dim_{\mathbb{C}}ker(\partial_t:M^{(i)}\to M^{(i)})\leq h^{n-1+i}(U)$$

et que

$$dim_{\mathbb{C}}coker(\partial_t:M^{(i)}\to M^{(i)})\leq h^{n+i}(U).$$

Nous affinerons ces résultats au paragraphe 4.

Lemme 3.2.2 *Si f n'a que des points critiques isolés sur U affine, on a :*
i) ∂_t est strict pour $F_\bullet$ (i.e $Im\partial_t\cap F_{p+1}M=\partial_tF_pM$),
ii)

$$Ker(\partial_t:M\to M)=Ker(\partial_t:F_pM\to F_{p+1}M)$$

pour tout $p\geq -2$ et

$$coker(\partial_t:M\to M)=coker(\partial_t:F_pM\to F_{p+1}M)$$

pour tout $p\geq -1$.

Preuve. i) résulte du lemme 3.2.1, ii) de la discussion précédente. □

On en déduit

Proposition 3.2.3 *Pour tout $p\geq 0$ on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & K & \to & F_{p-1}M & \xrightarrow{\partial_t} & F_pM & \to & H^n(U) & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & K & \to & F_pM & \xrightarrow{\partial_t} & F_{p+1}M & \to & H^n(U) & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \to & gr^F_pM & \xrightarrow{gr^F(\partial_t)} & gr^F_{p+1}M & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

avec $K=ker(\partial_t:M\to M)$. En particulier, pour tout $p\geq 0$, on a $dim_{\mathbb{C}}gr^F_pM=dim_{\mathbb{C}}gr^F_0M=\mu$.

□

Remarque 3.2.4 *i) En général on a $F_{p+1}M = \partial_t F_p M + F_p M$ pour tout $p \geq 0$ (égalité analogue pour les $M^{(k)}$) . Si $H^n(U) = 0$ on a $F_p M = \partial_t^p F_0 M$ et si ∂_t est bijective, on retrouve le fait (classique dans le cas local) que ∂_t^p est un isomorphisme de $F_0 M$ sur $F_p M$.*
ii) $F_0 M$ est de type fini sur $\mathbb{C}[t]$ si et seulement si il en est de même de $F_p M$ pour tout $p \geq 0$. Ainsi, $F_0 M$ est de type fini sur $\mathbb{C}[t]$ si et seulement si $F_\bullet$ est une bonne filtration (utiliser i)). Remarquons néanmmoins que si $F_0 M$ est libre de type fini, $F_p M$ peut avoir de la $\mathbb{C}[t]$-torsion pour $p > 0$ (prendre par exemple $U = \mathbb{C}^n$, $n = 2$ et $f(x, y) = x^4 + y^4$).

3.3 Complexe de Gauss-Manin et complexes de de Rham relatifs

U désigne toujours une variété affine lisse. Rappelons que $\Omega^p(U)$ désigne l'espace des p-formes régulières sur U. On définit

$$\Omega^p(U/S) = \Omega^p(U)/df \wedge \Omega^{p-1}(U).$$

On obtient de cette manière un complexe (le *complexe de de Rham relatif*)

$$\Omega^\bullet_{rel}(U) := (\Omega^\bullet(U/S), d_{rel})$$

la différentielle d_{rel} étant induite par la différentielle d usuelle. On définit alors le complexe de de Rham relatif *tronqué*

$$'\Omega^\bullet_{rel}(U)$$

obtenu à partir du complexe $\Omega^\bullet_{rel}(U)$ en remplaçant $\Omega^n(U/S)$ par 0. Nous considérerons aussi le complexe $(df \wedge \Omega^\bullet(U), d)$. Le but de ce paragraphe est de préciser le lien entre ces trois complexes et le complexe de Gauss-Manin.

Proposition 3.3.1 *Supposons que les points critiques de f soient isolés sur U. Alors on a :*
i) pour tout p, un isomorphisme

$$H^p('\Omega^\bullet_{rel}(U)) \stackrel{df\wedge}{\to} H^{p+1}(df \wedge \Omega^\bullet(U)),$$

ii) pour tout $k < 0$,

$$H^{n+k}(df \wedge \Omega^\bullet(U)) = F_{-k}M^{(k)} = M^{(k)},$$

iii) $H^n(df \wedge \Omega^\bullet(U)) = F_{-1}M$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(\Omega^\bullet_{rel}(U)) & \stackrel{df\wedge}{\longrightarrow} & F_{-2}M \\ \delta' \downarrow & & \downarrow \partial_t \\ H^{n-1}('\Omega^\bullet_{rel}(U)) & \stackrel{df\wedge}{\longrightarrow} & F_{-1}M \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes de $\mathbb{C}[t]$-modules.

Preuve. i) D'après le lemme 3.0.1, pour tout $p \leq n-1$ la multiplication par $df\wedge$ induit un isomorphisme

$$\Omega^p(U/S) \stackrel{df\wedge}{\to} df \wedge \Omega^p(U).$$

D'où le résultat parce que $df\wedge$ commute (au signe près) avec la différentielle d.
ii) La première égalité résulte des définitions. Pour la deuxième, il suffit de remarquer que $F_{-k}M^{(k)}$ est stable par ∂_t et d'utiliser la remarque 3.2.4 i).
iii) La première égalité est évidente. δ' est définie comme suit [M, p. 410] : relevons l'élément ω de $H^{n-1}(\Omega^\bullet_{rel}(U))$ en un élément $\overline{\omega}$ de $\Omega^{n-1}(U)$. On a $d\overline{\omega} = df \wedge \overline{\eta}$, $\overline{\eta} \in \Omega^{n-1}(U)$. Alors $\delta'(\omega) = \eta$, η désignant la classe de $\overline{\eta}$ dans $H^{n-1}('\Omega^\bullet_{rel}(U))$.

□

Notons que δ' est une $(H^{n-1}(\Omega^\bullet_{rel}(U)), H^{n-1}('\Omega^\bullet_{rel}(U)))$- connexion (au sens de Malgrange [M, p.408]) et que l'isomorphisme $df\wedge$ est compatible aux connexions .

Corollaire 3.3.2 *On a les suites exactes*
i)

$$\cdots \to H^{n-2}(U) \to M^{(-1)} \stackrel{\partial_t}{\to} M^{(-1)} \to H^{n-1}(U) \to F_{-2}M \stackrel{\partial_t}{\to} F_{-1}M \to H^n(U) \to H^n(\Omega^\bullet_{rel}(U)) \to 0,$$

ii) pour tout $p \geq -1$

$$\cdots \to H^{n-2}(U) \to M^{(-1)} \stackrel{\partial_t}{\to} M^{(-1)} \to H^{n-1}(U) \to F_pM \stackrel{\partial_t}{\to} F_{p+1}M \to H^n(U) \to 0,$$

iii)

$$\cdots \to H^{n-2}(U) \to M^{(-1)} \stackrel{\partial_t}{\to} M^{(-1)} \to H^{n-1}(U) \to M \stackrel{\partial_t}{\to} M \to H^n(U) \to 0.$$

Preuve. Ecrivons la suite exacte de cohomologie induite par la suite exacte de complexes

$$0 \to df \wedge \Omega^\bullet(U) \to \Omega^\bullet(U) \to \Omega^\bullet(U/S) \to 0.$$

On obtient

$$\cdots \to H^{n-2}(U) \to H^{n-2}(\Omega^\bullet_{rel}(U)) \to H^{n-1}((df \wedge \Omega^\bullet(U)) \to H^{n-1}(U)$$

$$\to H^{n-1}(\Omega^\bullet_{rel}(U)) \stackrel{\delta}{\to} H^n((df \wedge \Omega^\bullet(U)) \to H^n(U) \to H^n(\Omega^\bullet_{rel}(U)) \to 0$$

avec $\delta = df \wedge \circ\delta' = \partial_t \circ df\wedge$ (la première égalité résulte de [M, p. 410]), $\partial_t : F_{-2}M \to F_{-1}M$. D'où i) d'après la proposition précédente car $df\wedge$ est un isomorphisme. ii) résulte de i), du lemme 3.2.2 ii) et de la proposition 3.2.3. Enfin, iii) s'obtient à partir de ii) via le lemme 3.2.2. □

Notons que la suite exacte du point iii) apparait dans la preuve de la proposition 1.3 de [DS1].

4 Application au cas où f est à singularités isolées y compris à l'infini

4.1

Rappelons (voir par exemple [Bre], [D], [DS] et les références qui y sont mentionnées) que l'on dit que f est à *singularités (cohomologiquement) isolées y compris à l'infini* si il existe une compactification $\overline{f} : \overline{U} \to S$ de f telle que $\overline{f}$ soit propre et que Σ_s soit (au plus) un nombre fini de points, Σ_s désignant le support de $\phi_{\overline{f}-s} Rj_* \mathbb{C}_U$ (ϕ est le foncteur cycle évanescent et $j : U \to \overline{U}$ est l'inclusion). Si tel est le cas, f a au plus des points critiques isolés sur U [D, prop.5.8, p.76]. Si de plus $\Sigma_s \subset U$ pour tout $s \in S$, f est dite *cohomologiquement modérée* [S].

Supposons que f soit à singularités isolées y compris à l'infini. Comme ${}^p\phi := \phi[1]$ préserve les faisceaux pervers, $\mathcal{E}_s := {}^p\phi_{\overline{f}-s} Rj_* \mathbb{C}_U[n]$ est un faisceau pervers à support dans Σ_s et donc, par hypothèse, $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_s) = 0$ pour $i \neq 0$. On notera $E_x = \mathcal{H}^0(\mathcal{E}_s)_x$ pour $x \in \Sigma_s$: c'est un espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément, si $x \in U$ on a $dim E_x = \mu(x)$ [D, prop.5.8], $\mu(x)$ désignant le nombre de Milnor de f en x et $\mu = \sum_{x\in U} dim E_x$ (μ nombre de Milnor global). Si $x \in \Sigma_s \cap (\overline{U} - U)$ on notera $\nu(x) := dim E_x$ et $\nu := \sum_{x\in\overline{U}-U} \nu(x)$. f est donc cohomologiquement modérée si et seulement si $\nu = 0$.

Si f est à singularités isolées y compris à l'infini, $F_0 M$ est (libre) de type fini sur $\mathbb{C}[t]$ si et seulement si f est cohomologiquement modérée ([S] pour "si", essentiellement [DS1, remarque 3.3] pour "seulement si" ; voir aussi ce qui suit les propositions 5.1.1 et 6.0.5 de ces présentes notes).

Soit ${}^p\mathcal{H}^i$ le foncteur de cohomologie perverse : par définition on a

$$DR(\mathcal{M}^{(i)}) = {}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_* \mathbb{C}_U[n]).$$

Si f est à singularités isolées y compris à l'infini, les faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)$, pour $i < n$, sont localement constants sur $\mathbb{A}^1$ [DS, 3.1.1] (parce que $\phi_{t-s}({}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{C}$, voir [D, exercice 3.2]) donc constants. Rappelons que l'on en déduit que (*loc. cit.*), en général,

$${}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U) = (R^{i-1}f_*\mathbb{C}_U)[1]$$

pour tout $i < n$ (dans le deuxième terme de l'égalité on a écrit f pour f^{an} et $\mathbb{C}_U$ pour $\mathbb{C}_{U^{an}}$, DR étant pris au sens analytique). En effet, ce qui précède montre que $\mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)) = 0$ pour $i < n$ et le résultat se déduit de la suite exacte [D, proposition 4.7]

$$0 \to \mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)) \to R^i f_*\mathbb{C}_U \to \mathcal{H}^{-1}({}^p\mathcal{H}^{i+1}(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)) \to 0.$$

Notons que si $R^n f_*\mathbb{C}_U = 0$ on a $\mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^n(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)) = 0$ et donc aussi

$${}^p\mathcal{H}^n(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U) = (R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)[1].$$

Ces arguments sont dûs originellement à C. Sabbah ([S] quand f est cohomologiquement modérée).

4.2

Si f est à singularités isolées y compris à l'infini, nous pouvons, à l'aide de la suite exacte du corollaire 3.3.2 iii), donner la dimension du noyau et du conoyau de ∂_t agissant sur M :

Théorème 4.2.1 *Si f est à singularités isolées y compris à l'infini et si U est affine de dimension n on a :*
i) Si $i < 0$, $dim_{\mathbb{C}} coker(\partial_t : M^{(i)} \to M^{(i)}) = 0$ et $dim_{\mathbb{C}} ker(\partial_t : M^{(i)} \to M^{(i)}) = h^{n-1+i}(U)$.
ii) $dim_{\mathbb{C}} ker(\partial_t : M \to M) = h^{n-1}(U)$ et $dim_{\mathbb{C}} coker(\partial_t : M \to M) = h^n(U)$.

Preuve. i) Nous venons de voir que le faisceau pervers ${}^p\mathcal{H}^i(\boldsymbol{R}f_*\mathbb{C}_U)$ $(i < n)$ est (localement) constant. Par conséquent $M^{(i)}$ est un $\mathbb{C}[t]$-module libre de rang fini pour $i < 0$. Comme $M^{(i)}$ est de plus régulier à l'infini, on en déduit que ∂_t est surjective sur $M^{(i)}$: en effet, par hypothèse, on peut supposer que $M^{(i)} = \frac{\mathbb{C}[t]<\partial_t>}{\mathbb{C}[t]<\partial_t>\partial_t^r}$, auquel cas le résultat est élémentaire (chemin faisant, on montre aussi que le noyau de ∂_t sur $M^{(i)}$ est de dimension finie, égale au rang de $M^{(i)}$ sur $\mathbb{C}[t]$). Le fait que $dim_{\mathbb{C}} ker(\partial_t : M^{(i)} \to M^{(i)}) = h^{n-1+i}(U)$ résulte alors du corollaire 3.3.2 iii).
ii) D'après i), ∂_t est surjective sur $M^{(-1)}$. La suite exacte du corollaire 3.3.2 iii) fournit alors $dim(ker \partial_t : M \to M) = h^{n-1}(U)$. □

Du point i) du théorème on déduit (comparer avec [DS, prop. 3.3])

Corollaire 4.2.2 *Si f est à singularités isolées y compris à l'infini, le rang du $\mathbb{C}[t]$-module libre $M^{(i)}$ $(i < 0)$ vaut $h^{n-1+i}(U)$.* □

Corollaire 4.2.3 *Si f est à singularités isolées y compris à l'infini, ∂_t est bijective sur M si et seulement si $h^{n-1}(U) = h^n(U) = 0$.* □

Gardons les notations du paragraphe 3.3.

Corollaire 4.2.4 *Supposons f à singularités isolées y compris à l'infini. Soit $0 > k > 1 - n$. Alors $H^{n+k}(df \wedge \Omega^\bullet(U))$, $H^{n+k-1}({}'\Omega^\bullet_{rel}(U))$ et $H^{n+k-1}(\Omega^\bullet_{rel}(U))$ sont des $\mathbb{C}[t]$-modules libres de rang $h^{n-1+k}(U)$.* □

Si $U = \mathbb{A}^n$, on en déduit en particulier que les groupes $H^p(df \wedge \Omega^\bullet(U))$, $H^{p-1}({}'\Omega^\bullet_{rel}(U))$ et $H^{p-1}(\Omega^\bullet_{rel}(U))$ sont nuls pour $1 < p < n$.

5 Application au transformé de Fourier de M

5.1

Soit G le transformé de Fourier du $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$-module M : il s'agit de M vu comme $\mathbb{C}[\tau] < \partial_\tau >$-module où τ agit comme ∂_t et ∂_τ agit comme $-t$. Ainsi,

$$G := \frac{\Omega^n(U)[\tau]}{d_f(\Omega^{n-1}(U)[\tau])},$$

avec $d_f(\sum_i \omega_i \tau^i) = \sum_i (d\omega_i \tau^i - df \wedge \omega_i \tau^{i+1})$ (d_f n'est autre que $e^{\tau f} \circ d \circ e^{-\tau f}$ où d désigne la différentielle usuelle sur les formes différentielles).

On considère le localisé

$$G[\tau^{-1}] := \frac{\Omega^n(U)[\tau, \tau^{-1}]}{d_f(\Omega^{n-1}(U)[\tau, \tau^{-1}])}.$$

Comme M est un $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$-module holonome régulier, $G[\tau^{-1}]$ est un $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$-module libre de rang fini muni d'une dérivation : c'est donc une connexion méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ dont les singularités sont en 0 et ∞ seulement, la première étant régulière, la seconde de rang de Poincaré inférieur ou égal à 1 [SabL, chap. V, prop. 2.2].
On définit aussi, suivant C. Sabbah, le $\mathbb{C}[\tau^{-1}]$-module

$$G_0 := H^n(\Omega^\bullet(U)[\tau^{-1}], \tau^{-1} d_f) := H^n(\Omega^\bullet(U)[\theta], \theta d_f)$$

si l'on écrit, comme le veut l'usage, $\theta := \tau^{-1}$. Remarquons que $\theta^2 \nabla_{\partial_\theta} G_0 \subset G_0$.

Proposition 5.1.1 *Si U est affine et si f a au plus des points critiques isolés sur U on a :*
i) G_0 n'a pas de $\mathbb{C}[\theta]$-torsion,
ii) $G_0/\theta G_0 = \Omega^n(U)/df \wedge \Omega^{n-1}(U)$,
iii) si $F_0 M$ est de type fini sur $\mathbb{C}[t]$ alors G_0 est de type fini sur $\mathbb{C}[\theta]$.

Preuve. Pour i), il suffit de montrer que $G_0 \subset G[\tau^{-1}]$: ceci résulte du lemme 3.0.1. ii) provient aussi du lemme 3.0.1. iii) résulte de [S, proposition 2.1] parce que d'après i) G_0 est l'image de $\Omega^n(U)[\theta]$ dans $G[\theta]$. □

Ainsi (avec les hypothèses de la proposition) si G_0 est libre sur $\mathbb{C}[\theta]$ son rang vaut μ et si l'on veut montrer que G_0 est libre il suffit de montrer que $F_0 M$ est de type fini. Notons que si cette condition est satisfaite, G_0 est même un réseau de $G[\theta]$, i.e un $\mathbb{C}[\theta]$-module libre tel que $\mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[\theta]} G_0 = G[\theta]$.

5.2 Calcul du rang de G

Comme M est régulier y compris à l'infini , on peut utiliser la proposition suivante pour comparer les rangs de G et de M (voir par exemple [SabL, proposition 2.2, chapitre V, p. 159] pour une démonstration ; le résultat y est attribué à Malgrange). Rappelons que, par définition, le rang de G est égal au rang du $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$-module libre $G[\tau^{-1}]$ et que celui de M est égal à $dim_{\mathbb{C}(t)} \mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} M$ (c'est aussi le rang de $\mathbb{C}[t, p^{-1}(t)] \otimes_{\mathbb{C}[t]} M$, $p^{-1}(0)$ étant égal à l'ensemble des points singuliers du $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$-module holonome M).

Proposition 5.2.1 *(Malgrange) On a $dim(coker \partial_t) - dim(ker \partial_t) = rgG - rgM$.*

Corollaire 5.2.2 *Si f cohomologiquement modérée $F_0 M$ et G_0 sont des réseaux de M et $G[\tau^{-1}]$ respectivement et*

$$dim(coker \partial_t) - dim(ker \partial_t) = rg_{\mathbb{C}[\theta]} G_0 - rg_{\mathbb{C}[t]} F_0 M = \mu - m$$

où m désigne le $n-1$-ième nombre de betti d'une fibre générique. En particulier, si ∂_t est bijective on a toujours $\mu = m$.

Preuve. Comme f est cohomologiquement modérée, F_0M est libre de type fini sur $\mathbb{C}[t]$, [S], et c'est donc un réseau de M. L'assertion sur G_0 résulte alors de la proposition 5.1.1 iii). On a donc $rg_{\mathbb{C}[\theta]}G_0 = rgG$ et $rg_{\mathbb{C}[t]}F_0M = rgM$. Le rang de G_0 vaut μ d'après 5.1. Comme $DR(\mathcal{M}^{(0)}) = (R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)[1]$ d'après [S] (voir aussi le paragraphe 4.1), $\mathcal{M}_a^{(0),an}$ est, si a est générique ($a \notin p^{-1}(0)$), un $\mathcal{O}_a$-module libre de rang $dim_{\mathbb{C}}(R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)_a = dim_{\mathbb{C}}H^{n-1}(f^{-1}(a), \mathbb{C})$. Mais, pour un tel a, $\mathcal{O}_a \otimes_{\mathbb{C}[t]} M$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_a)^{rgM}$ et donc le rang de M, rgM, est égal à $dim_{\mathbb{C}}H^{n-1}(f^{-1}(a), \mathbb{C})$ parce que $\mathcal{O}_a \otimes_{\mathbb{C}[t]} M$ est aussi isomorphe à $\mathcal{M}_a^{(0),an}$. □

Le théorème qui suit généralise les résultats précédents :

Théorème 5.2.3 *Si f est à singularités isolées y compris à l'infini et si U est affine de dimension n on a*
i)

$$rgG = rgM + h^n(U) - h^{n-1}(U),$$

ii)

$$rgM = \mu + \nu + h^{n-1}(U) - h^n(U),$$

iii)

$$rgG = \mu + \nu.$$

Preuve. La première égalité provient du théorème 4.2.1 et de la proposition 5.2.1. U^{an} étant de Stein de dimension n, on a (avec les conventions du paragraphe 4.1) $R^nf_*\mathbb{C}_U = 0$ et donc $DR(\mathcal{M}^{(0)}) = (R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)[1]$ d'après le paragraphe 4.1 car f est à singularités isolées y compris à l'infini. Mais le $n-1$-ième nombre de betti d'une fibre générique est exactement le terme de droite de l'égalité ii) d'après [DS, proposition 3.3] (l'hypothèse $S = \mathbb{A}^1$ est ici indispensable). D'où ii) en utilisant le même argument que dans la preuve du corollaire précédent. iii) est évidemment conséquence des deux premières.

□

L'assertion sur le rang de G concrétise une formule (avatar de la proposition 5.2.1) donnée par Brylinski [Br, cor. 8.3]. Notons aussi que si F_0M est de type fini, on a

$$rgF_0M = dim_{\mathbb{C}}\frac{F_1M}{F_0M} + dim_{\mathbb{C}}ker(\partial_t : F_0M \to F_1M) - dim_{\mathbb{C}}coker(\partial_t : F_0M \to F_1M),$$

formule qui doit être comparée avec [M, th. 2.3]. Il faut remarquer cependant que $\frac{F_1M}{F_0M}$ n'est pas toujours un $\mathbb{C}[t]$-module de torsion.

Corollaire 5.2.4 *Si f est à singularités isolées y compris à l'infini on a $rgG = rgM$ si et seulement si $h^{n-1}(U) = h^n(U)$. Si de plus f est cohomologiquement modérée on a $rgM = \mu + h^{n-1}(U) - h^n(U)$ et $rgM = \mu$ si et seulement si $h^{n-1}(U) = h^n(U)$.*

Exemple 5.2.5 *(Barannikov) Si $U = (\mathbb{C}^*)^n$ et si f est cohomologiquement modérée, $rgM = \mu + n - 1$. Si de plus*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \frac{1}{x_1 \cdots x_n},$$

auquel cas $\mu = n+1$, on obtient $rgM = 2n$ (f est cohomologiquement modérée car non-dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini [S]). F_0M est libre sur $\mathbb{C}[t]$ de rang $2n$ et G_0 est libre sur $\mathbb{C}[\theta]$ de rang $n+1$.

Corollaire 5.2.6 *G_0 est (libre) de type fini si et seulement si f est cohomologiquement modérée.*

Preuve. Nous avons vu (proposition 5.1.1) que si f est cohomologiquement modérée G_0 est de type fini. Si G_0 est de type fini, son rang vaut μ et comme c'est alors un réseau de G la proposition 5.2.3 iii) montre que $\nu = 0$. f est donc cohomologiquement modérée. □

5.3 Irrégularité

On suppose maintenant f à singularités isolées y compris à l'infini et ∂_t bijective sur M. On a donc $rgG = rgM$ et G est un $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]$-module libre de rang $\mu+\nu$. On pose, comme en 5.1, $\theta := \tau^{-1}$. On suppose que G admet une base Ω (sur $\mathbb{C}[\theta,\theta^{-1}]$) dans laquelle la matrice de $\theta^2\partial_\theta$ s'écrive $A_0+\theta A_1$, A_0 et A_1 constantes. Soit $ir_\infty(G)$ l'irrégularité de G en $\theta=0$. Soit r_0 le nombre de valeurs propres nulles de la matrice A_0. La proposition suivante résulte de [SabL, chapitre V, paragraphes 2 et 3].

Proposition 5.3.1 *$ir_\infty G = rgG - r_0$.*

Soit μ_0 la somme des nombres de Milnor des points critiques de f se situant sur l'hypersurface $f^{-1}(0)$.

Proposition 5.3.2 *Supposons f cohomologiquement modérée et ∂_t bijective sur M. Alors*

$$ir_\infty G = \mu - \mu_0.$$

Preuve. Si f est cohomologiquement modérée, $rgG = \mu$ et l'existence d'une base vérifiant les propriétés ci-dessus est maintenant classique [S]. Il suffit de remarquer que A_0 représente la matrice de la multiplication par f sur $\frac{\Omega^n(U)}{df\wedge\Omega^{n-1}(U)}$ (dans la base évidente) et que par conséquent ses valeurs propres sont exactement les valeurs critiques de f. □

Rappelons qu'un $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$-module est dit monodromique si son seul point singulier est 0. Ainsi, le système de Gauss-Manin M de f (cohomologiquement modérée) est monodromique si et seulement si f a une seule valeur critique, 0. Comme c'est le cas si et seulement si $\mu = \mu_0$, on déduit de la proposition précédente

Corollaire 5.3.3 *Supposons f cohomologiquement modérée et ∂_t bijective sur M. G est régulier à l'infini si et seulement si M est monodromique.*

Comment caractériser les applications f *cohomologiquement modérées* dont le système de Gauss-Manin est monodromique ?

Conjecture Supposons f cohomologiquement modérée. Alors M est monodromique si et seulement si f appartient à l'idéal engendré par ses dérivées partielles. De manière équivalente, G est régulier à l'infini si et seulement si f appartient à l'idéal engendré par ses dérivées partielles.

(Cette conjecture a été motivée par une question posée par J. Briançon [B]).

Dans notre situation, et avec les notations précédentes, on peut traduire cette conjecture de la manière suivante : si A_0 est nilpotente alors A_0 est nulle (cette dernière condition étant vérifiée si et seulement si toutes les singularités de $f^{-1}(0)$ sont quasi-homogènes).

6 Analytisation

Soit, comme dans l'introduction, $\mathcal{M}^{(i)}$ le i-ème faisceau de cohomologie de l'image directe $f_+\mathcal{O}_U$. Par définition du complexe de de Rham (analytique) et parce que le foncteur de Rham commute aux images directes, on a une suite exacte (on écrit U pour U^{an} etc...)

$$\cdots \to R^{n+i-1}f_*\mathbb{C}_U \to \mathcal{M}^{(i),an} \xrightarrow{\partial_t} \mathcal{M}^{(i),an} \to R^{n+i}f_*\mathbb{C}_U \to \cdots$$

On suppose maintenant que f est à singularités isolées y compris à l'infini (cf. paragraphe 4). En particulier les faisceaux $\mathcal{M}^{(i),an}$ sont $\mathcal{O}_{S^{an}}$-(localement) libres pour $i<0$. Soit Δ l'ensemble des points singuliers du $\mathcal{D}_S$-module $\mathcal{M}^{(0),an}$ et $\mathcal{O}_a$ l'anneau des germes des fonctions holomorphes en a.

Proposition 6.0.4 *1. Soit $a \in S-\Delta$. Pour tout i, $\mathcal{M}_a^{(i),an}$ est libre sur $\mathcal{O}_a$, de rang $h^{n+i-1}(U)$ si $i<0$ et de rang $\mu+\nu+h^{n-1}(U)-h^n(U)(=dim_{\mathbb{C}}(R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)_a)$ si $i=0$.*
2. Soit $a\in\Delta$.
i) Si $i<0$, $\mathcal{M}_a^{(i),an}$ est libre sur $\mathcal{O}_a$, de rang $h^{n+i-1}(U)$.
ii) Sur $\mathcal{M}_a^{(0),an}$, ∂_t est toujours surjective.
Si f est de plus cohomologiquement modérée,

$$dim_{\mathbb{C}}ker(\partial_t : \mathcal{M}_a^{(0),an} \to \mathcal{M}_a^{(0),an}) = dim_{\mathbb{C}}(R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)_a = \mu-\mu_a+h^{n-1}(U)-h^n(U)$$

avec $\mu_a=\sum_{x\in f^{-1}(a)}\mu(x)$.

Preuve. 1 et 2 i) sont conséquences directes de la suite exacte précédente : en effet, comme f est à singularités isolées y compris à l'infini, que U est affine et que $S=\mathbb{A}^1$, on a $dim_{\mathbb{C}}(R^{n+i-1}f_*\mathbb{C}_U)_a = h^{n+i-1}(U)$ si $i<0$ et $dim_{\mathbb{C}}(R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)_a = \mu+\nu+h^{n-1}(U)-h^n(U)$ d'après [DS, proposition 3.3]. La première assertion de 2 ii) résulte de ce que U est affine. La première égalité provient de la suite exacte du début de ce paragraphe, la deuxième de ce que $dim_{\mathbb{C}}(R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U)_a = dim_{\mathbb{C}}H^{n-1}(f^{-1}(a),\mathbb{C})$ (car f est cohomologiquement modérée). Il suffit alors d'utiliser [DS, prop. 3.2]. □

Soit maintenant $a\in\Delta$, $\mathcal{D}_a := \mathcal{O}_a\otimes_{\mathbb{C}[t]}\mathbb{C}[t]<\partial_t>$ et $M_a := \mathcal{D}_a\otimes_{\mathbb{C}[t]<\partial_t>}M$ (rappelons que M désigne les sections globales sur S de $\mathcal{M}^{(0)}$). On définit $F_pM_a := \mathcal{O}_a\otimes F_pM$, $F_\bullet M$ désignant la filtration sur M définie au paragraphe 3. On obtient ainsi une filtration de M_a par des $\mathcal{O}_a$-sous-modules dont les propriétés (qui proviennent de celles de $F_\bullet M$) sont résumées par la proposition suivante

Proposition 6.0.5 *On a*
i) $dim_{\mathbb{C}} gr_p^F M_a = \mu_a$ *pour tout* $p \geq 0$ *avec comme ci-dessus* $\mu_a = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \mu(x)$.
ii) $F_{p+1} M_a = \partial_t F_p M_a + F_p M_a$ *pour tout* $p \geq 0$.
En particulier, $F_\bullet M_a$ *définit une bonne filtration du* $\mathcal{D}_a$*-module* M_a *si et seulement si* $F_0 M_a$ *est (libre) de type fini sur* $\mathcal{O}_a$.

On peut utiliser cette proposition pour montrer que $F_0 M_a$ est (libre) de type fini sur $\mathcal{O}_a$ si et seulement si f est cohomologiquement modérée : si f est cohomologiquement modérée, cela résulte de ce qui précède. Pour la réciproque, remarquons tout d'abord que, puisque $DR(\mathcal{M}^{(0)}) = (R^{n-1} f_* \mathbb{C}_U)[1]$ (U affine), $dim_{\mathbb{C}} \phi_{t-a} DR(\mathcal{M}^{(0)}) = dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{H}^0(\Sigma_a, \mathcal{E}_a)$ [D, preuve du théorème 5.2], Σ_a et $\mathcal{E}_a$ étant définis comme en 4.1. Si $F_\bullet M_a$ est une bonne filtration, $dim_{\mathbb{C}} gr_p^F M_a = \mu_a = dim_{\mathbb{C}} \phi_{t-a} DR(\mathcal{M}^{(0)})$ d'après [DS1, remarque 3.3] ce qui montre que f est cohomologiquement modérée (ce dernier argument est tiré de *loc. cit*).

La filtration $F_\bullet$ permet de définir le (un) *spectre* du $\mathbb{C}\{t-a\} < \partial_t >$-module M_a (cette définition est pour l'essentiel dûe à A. Dimca) : si $V^\bullet$ désigne la filtration de Malgrange-Kashiwara définie sur M_a (par définition, $(\partial_t t - \beta)$ est nilpotente sur $gr_\beta^V M_a$), on pose

$$Sp(M_a, F) = \sum_\alpha d_\alpha(M_a, F).\alpha$$

avec $d_\alpha(M_a, F) := dim_{\mathbb{C}} gr_m^F gr_V^r M_a$, $\alpha = m + r$, $m \in \mathbb{Z}$, $r \in]0, 1]$ (remarquons que $d_\alpha(M_a, F) \neq dim_{\mathbb{C}} gr_V^\alpha F_0 M_a / F_{-1} M_a$ en général car ∂_t n'est pas toujours bijective sur M_a comme le montre la proposition 6.0.4). Cette définition est motivée par le résultat suivant (dû aussi à A. Dimca, se réferer à [DS1, preuve de la proposition 3.5] pour plus de détails) : supposons que $U = \mathbb{C}^n$, que f soit *cohomologiquement modérée*. Alors

$$Sp(M_a, F) = (\mu - \mu_a).0 + \sum_{x \in sing\ f^{-1}(a)} Sp(f, x)$$

où $Sp(f, x)$ désigne le spectre (local) de f au point critique x. Cette formule n'est plus vraie si f n'est pas cohomologiquement modérée.

7 Et si $S \neq \mathbb{A}^1$?

Comme me l'a fait remarquer A. Dimca, il peut être intéressant de considérer la situation plus générale où $f : U \to S$, U, S affines, $dim S = 1$ (le cas traité en pratique étant celui où $S = \mathbb{A}^1 - \{0\}$). Malheureusement, mis à part le paragraphe 3, les résultats précédents ne sont plus toujours vrais dans ce contexte. Même si l'on a toujours $DR(\mathcal{M}^{(i)}) = (R^{n+i-1} f_* \mathbb{C}_U)[1]$, les faisceaux $R^{n+i-1} f_* \mathbb{C}_U$, qui sont des systèmes locaux sur S pour $i < 0$, ne sont plus constants (pour $i < 0$) si S n'est pas contractile. En particulier, la formule ii) du théorème 5.2.3 (qui calcule le rang m de M) n'est plus valable. Remarquons que l'on a seulement l'égalité

$$m\chi(S) = \sum_{s \in \Delta} \phi_{t-s}(R^{n-1} f_* \mathbb{C}_U) + (-1)^{n-1} \chi(U) + \chi(S) (\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{i-(n-2)} rg R^i f_* \mathbb{C}_U)$$

($R^{n-1}f_*\mathbb{C}_U$ système local sur $S-\Delta$). En particulier, si $S=\mathbb{A}^1-\{0\}$ et si f est cohomologiquement modérée, on a $\mu=(-1)^n\chi(U)$ (égalité qui doit être comparée avec les résultats connus si U est le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans). Il faut aussi noter que même si les modules $M^{(i)}$ ($i<0$) sont libres sur $\mathcal{O}(S)$, réguliers, il n'est pas immédiat que ∂_t est surjective sur $M^{(i)}$. Et quand bien même, se pose le problème du calcul du rang de $M^{(i)}$ pour $i<0$.

Références

[Ba] Barannikov (S).– *Semi-infinite hodge structures and mirror symmetry for projective spaces*, arXiv :math.AG/0010157, 2000.

[B] Briançon (J).– *Un polynôme appartient-il à l'idéal de ses dérivées ?* , prépublication 632 de l'université de Nice, novembre 2001.

[BD] Bonnet (Ph), Dimca (A).– *Relative differential forms and complex polynomials*, Bull. Sci. Math **124**, 2000, p. 557-571.

[Bo] Borel (A) et al.– *Algebraic D-Modules*, Perspective in Mathematics, vol. 2, Academic Press, 1987.

[Bre] Brélivet (T).– *Topologie des fonctions régulières et cycles évanescents*, prépublication.

[Br] Brylinski (J.L).– *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques*, in *Géométrie et analyse microlocales*, Astérisque, **140-141**, 1986, p.3-134.

[D] Dimca (A).– *Une introduction aux faisceaux pervers*, cours post DEA de l'université Bordeaux 1, 1999.

[DS] Dimca (A), Saito (M).– *Algebraic Gauss-Manin systems*, prepublication **97** de l'université de Bordeaux 1, 1999.

[DS1] Dimca (A), Saito (M).– *Algebraic Gauss-Manin systems and Brieskorn modules*, American Journal of Math. **123**, 2001, p. 163-184.

[M] Malgrange (B).– *Intégrales asymptotiques et monodromie*, Ann. Sci. E.N.S **7**, 1974, p. 405-430.

[M1] Malgrange (B).– *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, Lecture Notes in Math. **459**, 1974, p. 98-119.

[Ph] Pham (F).– *Singularités des systèmes de Gauss-Manin*, Progress in Math, vol.2, Birkhauser, Boston, 1980.

[Ph1] Pham (F).– *La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin*, Astérisque, **130**, 1985, p. 11-47.

[S] Sabbah (C).– *Hypergeometric periods for a tame polynomial*, C. R Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**, 1999, p. 603-608 et preprint math. AG/9805077.

[SabL] Sabbah (C).– *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, preprint 2000-05 du centre de mathématiques de l'école polytechnique, janvier 2000.

[Se] Serre (J.P).– *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier **6**, 1956, p. 1-42.