Rappels de topologie pour la Licence

Erwann Aubry

Sommaire

Chapitre 1

Sommaire

Espaces topologiques

Nous commençons par un exercice dont le résultat sera souvent utilisé dans la suite.

Exercice 1.1 *Soit E un ensemble et pour tout $j \in J$, soit $(A_i^j)_{i \in I_j}$ une famille de parties de E. Montrer qu'on a les formules de commutation suivantes*

$$\bigcap_{j \in J} \Big(\bigcup_{i \in I_j} A_i^j\Big) = \bigcup_{(i_j) \in \prod_{j \in J} I_j} \Big(\bigcap_{j \in J} A_{i_j}^j\Big)$$

$$\bigcup_{j \in J} \Big(\bigcap_{i \in I_j} A_i^j\Big) = \bigcap_{(i_j) \in \prod_{j \in J} I_j} \Big(\bigcup_{j \in J} A_{i_j}^j\Big)$$

1.1 Définitions, exemples

1.1.1 Topologie, ouverts

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition 1.1 *Une topologie sur E est une famille $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ de parties de E vérifiant les 3 conditions suivantes*

1) $\varnothing$ et E sont des éléments de $\mathcal{O}$,

2) toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$,

3) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les ouverts de la topologie. Le couple $(E, \mathcal{O})$ est appelé un espace topologique.

Exemple 1.1 *L'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ peut-être muni de 29 topologies distinctes données par la liste suivante.*

$$\mathcal{O}_1 = \{\varnothing, E\}, \qquad \mathcal{O}_2 = \{\varnothing, \{1\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_3 = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_4 = \{\varnothing, \{1\}, \{1,3\}, E\}, \mathcal{O}_5 = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, E\}, \mathcal{O}_6 = \{\varnothing, \{1\}, \{1,3\}, \{1,2\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_7 = \{\varnothing, \{2\}, E\}, \quad \mathcal{O}_8 = \{\varnothing, \{2\}, \{1,2\}, E\}, \quad \mathcal{O}_9 = \{\varnothing, \{2\}, \{1,3\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{10} = \{\varnothing, \{2\}, \{2,3\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{11} = \{\varnothing, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{12} = \{\varnothing, \{3\}, E\}, \quad \mathcal{O}_{13} = \{\varnothing, \{3\}, \{1,2\}, E\}, \quad \mathcal{O}_{14} = \{\varnothing, \{3\}, \{1,3\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{15} = \{\varnothing, \{3\}, \{2,3\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{16} = \{\varnothing, \{3\}, \{1,3\}, \{3,2\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{17} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{18} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{19} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{20} = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{21} = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{22} = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{23} = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{24} = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, E\}, \quad \mathcal{O}_{25} = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{26} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{27} = \{\varnothing, \{1,2\}, E\},$$
$$\mathcal{O}_{28} = \{\varnothing, \{1,3\}, E\}, \qquad \mathcal{O}_{29} = \{\varnothing, \{2,3\}, E\}.$$

Exemple 1.2 *Soit E un ensemble non vide, alors $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ définit une topologie, appelée topologie discrète. Noter que la topologie est discrète si et seulement si tous les singletons de E (i.e. les parties de E constituées d'un seul élément) sont des ouverts.*

Exemple 1.3 *Soit E un ensemble non vide, alors $\{\varnothing, E\}$ est une topologie sur E appelée topologie grossière.*

Tout ensemble E admet donc au moins deux topologies.

Définition 1.2 *Soit E un ensemble et $\mathcal{O}$,$\mathcal{O}'$ deux topologies sur E. On dit que $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ (i.e. si tout ouvert de $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathcal{O}$).*

Cela définit une relation d'ordre sur les topologies de E.

Remarque 1.1 *Dans l'exemple 1.1, la topologie $\mathcal{O}_6$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}_4$. En revanche les topologies $\mathcal{O}_6$ et $\mathcal{O}_8$ ne sont pas comparables (l'ordre n'est pas total). La topologie grossière est la moins fine des topologies de E et la topologie discrète la plus fine.*

Lemme 1.1 *Si $\left(\mathcal{O}_i\right)_{i\in I}$ est une famille de topologie sur E alors $\mathcal{O} = \underset{i\in I}{\cap} \mathcal{O}_i$ est une topologie sur E.*

Preuve. On a $E, \varnothing \in \mathcal{O}_i$ pour tout i donc $E, \varnothing \in \mathcal{O}$. Si $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors pour tout $i \in I$ et tout $\alpha \in A$, on a $\Omega_\alpha \in \mathcal{O}_i$ et donc $\underset{\alpha\in A}{\cup} \Omega_\alpha \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$. D'où $\underset{\alpha\in A}{\cup} \Omega_\alpha \in \mathcal{O}$.

De même, $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie. $\square$

Définition 1.3 *Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de E. D'après le lemme précédent, l'intersection de toutes les topologies de E contenant $\mathcal{A}$ est une topologie sur E contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle la topologie engendrée par la famille $\mathcal{A}$, et on la note $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.*

La proposition suivante donne la construction pratique de la topologie engendrée par une famille de parties $\mathcal{A}$.

Proposition 1.2 *On note $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\varnothing, E\}$ et $\mathcal{A}''$ la famille des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}'$. Alors la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{A}''$ (i.e. $\mathcal{O}_A$ est l'ensemble des réunions d'intersections finies d'éléments de A).*

Preuve. On note $\mathcal{A}'''$ l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{A}''$. $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ contient $\mathcal{A}'''$ par définition, et $\mathcal{A}'''$ est une topologie qui contient $\mathcal{A}$, d'après le théorème suivant appliqué à la famille $P = \mathcal{A}''$. $\square$

Théorème 1.3 *Soit E un ensemble quelconque et $P \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E vérifiant*

1) La famille P est stable par intersections finies (i.e. l'intersection d'un nombre fini d'éléments de P est un élément de P),

2) $E = \underset{O \in P}{\cup} O$,

3) $\varnothing \in P$.

Alors l'ensemble $\mathcal{O}(P)$ des réunions quelconques d'éléments de P est une topologie sur E. C'est la topologie de E engendrée par la famille P.

Preuve. Il est clair que $\mathcal{O}(P)$ est stable par réunion quelconque et contient E et $\varnothing$.

Si $(O_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{O}(P)$, alors pour tout j il existe une famille $\left(\Omega_i^j\right)_{i \in I_j}$ d'éléments de P telle que $O_j = \cup_{i \in I_j} \Omega_i^j$. D'après l'exercice 1.1, on a alors

$$\bigcap_{j=1}^{k} O_j = \bigcap_{j=1}^{k} \bigcup_{i \in I_j} \Omega_i^j = \bigcup_{(i_1, \cdots, i_k) \in I_1 \times \cdots \times I_k} \Omega_{i_1}^1 \cap \cdots \cap \Omega_{i_k}^k$$

et comme P est stable par intersection finie, on a bien $\bigcap_{j=1}^{k} O_j \in \mathcal{O}(P)$. □

Exemple 1.4 *Soit $\mathcal{O}$ la topologie engendrée par la famille des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. C'est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Comme tout intersection finie d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est soit vide, soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, les ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle sont $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et toute réunion $\cup_{i \in I}]a_i, b_i[$ d'intervalles $\left(]a_i, b_i[\right)_{i \in I}$ ouverts de $\mathbb{R}$.*

Un intervalle de la forme $]a, b[$ est donc ouvert pour cette topologie. En revanche, les intervalles J de la forme $[a, b]$, $[a, b[$ ou $]b, a]$ ne sont pas ouverts car si $J = \cup_{i \in I}]a_i, b_i[$, alors il existerait $i_0 \in I$ tel que $a \in]a_{i_0}, b_{i_0}[\subset J$, ce qui contredit le fait que a est la borne supérieure ou inférieure de J.

Exemple 1.5 *On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble formé par $\varnothing$, $\overline{\mathbb{R}}$ et toute réunion d'intervalles de la forme $]a, b[$, ou $[-\infty, b[$, ou $]a, +\infty]$ (où a et b sont des réels). C'est la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$.*

1.1.2 Fermés

Définition 1.4 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $F \subset E$. On dit que F est un fermé de E si et seulement si $E \backslash F$ est un ouvert de E. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de E.*

Remarque 1.2 *Une partie de E peut-être ni ouverte ni fermée (par exemple $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$). De même un partie de E peut-être ouverte et fermée (par exemple E et $\emptyset$).*

Proposition 1.4 *L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de E vérifie les propriétés suivantes*

1) $\emptyset$ et E sont des fermés,

2) toute intersection de fermés est un fermé,

3) toute réunion finie de fermés est un fermé.

Ces propriétés des parties fermées découlent directement des propriétés vérifiées par les parties ouvertes d'une topologie et des égalités suivantes

$$E\backslash(\cup_{i\in I}O_i) = \cap_{i\in I}(E\backslash O_i), \qquad E\backslash(\cap_{i\in I}O_i) = \cup_{i\in I}(E\backslash O_i).$$

Remarquez qu'une partie est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé. Ainsi, une topologie peut aussi bien être définie par la donnée de l'ensemble de ses ouverts que par la donnée de l'ensemble de ses fermés.

Exemple 1.6 *Pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ est fermé et les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ ne sont pas fermés.*

Exemple 1.7 *Pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ sont des fermés. Comme $\mathbb{Z} = \mathbb{R}\backslash\cup_{k\in\mathbb{Z}}]k,k+1[$, $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne sont ni ouverts ni fermés dans $\mathbb{R}$ (par construction de $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel et donc, ni $\mathbb{Q}$, ni $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne peut-être la réunion d'une famille d'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$).*

1.1.3 Adhérence, intérieur, frontière

Proposition-définition 1.5 *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique et X une partie de E.*

a) Il existe un plus petit fermé contenant X, appelé l'adhérence (ou la fermeture) de X dans E. On le note $\overline{X}$.

b) Il existe un plus grand ouvert contenu dans X, appelé l'intérieur de X dans E. On le note $\operatorname{Int} X$.

c) *On appelle frontière de* X *l'ensemble* $\overline{X} \cap \overline{E \backslash X}$, *on le note* $\operatorname{Fr} X$.

d) *On appelle extérieur de* X *l'ensemble* $\operatorname{Int}(E \backslash X)$, *on le note* $\operatorname{Ext} X$.

PREUVE.

a) Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des fermés de E qui contiennent X. Alors $F_0 = \cap_{F \in \mathcal{F}'} F$ est un fermé de E contenant X. Si F_1 est un autre fermé de E contenant X, alors $F_1 \in \mathcal{F}'$ et donc $F_1 \supset F_0$. On en déduit que F_0 est le plus petit fermé de E contenant X.

b) De même, si $\mathcal{O}'$ est l'ensemble des ouverts de E contenus dans X, alors $O_0 = \cup_{O \in \mathcal{O}'} O$ est le plus grand ouvert de E contenu dans X.

□

Exemple 1.8 *Si* $(E, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \textit{topologie usuelle})$ *et* $X =]a, b[$, *alors* $\overline{X} = [a, b]$. *En effet,* $[a, b]$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$ *qui contient* $]a, b[$ *et donc* $]a, b[\subset \overline{X} \subset [a, b]$. $\overline{X}$ *ne peut donc être égal qu'à* $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ *ou* $[a, b]$. *Comme seul le dernier de ces intervalles est fermé dans* $\mathbb{R}$ *pour la topologie usuelle, on a* $\overline{]a, b[} = [a, b]$.

Proposition 1.5 *Soit* X *une partie de* E. *L'adhérence, l'intérieur, la frontière et l'extérieur de* X *vérifient les propriétés suivantes*

1) $X = \overline{X}$ *si et seulement si* X *est fermé,*

2) $X = \operatorname{Int} X$ *si et seulement si* X *est ouvert,*

3) $\overline{E \backslash X} = E \backslash \operatorname{Int} X$,

4) $\operatorname{Ext} X = \operatorname{Int}(E \backslash X) = E \backslash \overline{X}$,

5) $\operatorname{Fr} X$ *est un fermé de* E *et* $\operatorname{Fr} X = E \backslash \big(\operatorname{Int} X \cup \operatorname{Ext} X\big)$,

6) $\operatorname{Ext} X \cap \operatorname{Int} X = \varnothing$ *et donc, pour toute partie* X *de* E, E *est la réunion disjointe de* $\operatorname{Int} X$, *de* $\operatorname{Ext} X$ *et de* $\operatorname{Fr} X$.

PREUVE.

1) $\overline{X}$ est un fermé par définition, donc si $X = \overline{X}$ alors X est fermé.

   Réciproquement, si X est fermé alors $\overline{X} \subset X$ (car $\overline{X}$ est le plus petit fermé qui contient X). Comme on a toujours $X \subset \overline{X}$ par définition de $\overline{X}$, on obtient $X = \overline{X}$.

2) la preuve est similaire à celle de 1).

3) On a $\operatorname{Int} X \subset X$, donc $E\backslash X \subset E\backslash \operatorname{Int} X$. Or $E\backslash \operatorname{Int} X$ est un fermé, et $\overline{E\backslash X}$ est le plus petit fermé de E contenant $E\backslash X$, donc $(E\backslash \operatorname{Int} X) \supset \overline{E\backslash X} \supset E\backslash X$.

   Réciproquement, comme $E\backslash(\overline{E\backslash X})$ est un ouvert de E contenu dans X, on a $\operatorname{Int} X \supset E\backslash(\overline{E\backslash X})$. Donc $E\backslash \operatorname{Int} X \subset \overline{E\backslash X}$. On en déduit l'égalité.

4) Soit $Y = E\backslash X$, alors d'aprés l'égalité 3), on a $\overline{E\backslash Y} = E\backslash \operatorname{Int} Y$, d'où $\overline{E\backslash(E\backslash X)} = E\backslash \operatorname{Int}(E\backslash X)$, i.e. $\overline{X} = E\backslash \operatorname{Int}(E\backslash X)$, ce dont on déduit $E\backslash\overline{X} = \operatorname{Int}(E\backslash X)$.

5) $\operatorname{Fr} X = \overline{X} \cap \overline{E\backslash X}$, donc $\operatorname{Fr} X$ est fermé et $E\backslash \operatorname{Fr} X = (E\backslash\overline{X}) \cup E\backslash(\overline{E\backslash X})$, d'où $E\backslash \operatorname{Fr} X = \operatorname{Int}(E\backslash X) \cup \operatorname{Int}(E\backslash(E\backslash X)) = \operatorname{Ext} X \cup \operatorname{Int} X$.

6) Comme $\operatorname{Int} X \subset X$ et $\operatorname{Ext} X \subset (E\backslash X)$, on a $\operatorname{Int} X \cap \operatorname{Ext} X = \varnothing$. La dernière assertion découle alors de 5).

□

Les propriétés suivantes découlent directement des définitions mais sont très souvent utilisées.

Proposition 1.6 *Soit A une partie de E.*

1) Si $A \subset F$ et F est un fermé de E, alors $\overline{A} \subset F$.

2) Si $O \subset A$ et O est un ouvert de E, alors $O \subset \operatorname{Int} A$.

3) Si $O \cap A = \varnothing$ et O est un ouvert de E, alors $O \subset \operatorname{Ext} A$.

Proposition 1.7 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A et B deux parties de E. On a*

1) si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$.

3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

PREUVE. Exercice. □

Exemple 1.9 *Si $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$, alors $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ (car $\varnothing$ est fermé). Or $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$. Cet exemple montre qu'en général l'inclusion dans 3) n'est pas une égalité.*

1.1.4 Parties denses

Définition 1.6 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et D une partie de E. D est dite dense dans E si et seulement si $\overline{D} = E$.*

La propriété suivante est une caractérisation très pratique des parties denses.

Proposition 1.8 *D est dense dans E si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre D.*

PREUVE. Si D n'est pas dense alors $\overline{D} \neq E$, donc $E \backslash \overline{D}$ est un ouvert non vide de E qui n'intercepte pas D (car $D \subset \overline{D}$).

Réciproquement, si $O \in \mathcal{O}$ est un ouvert non vide de E tel que $O \cap D = \varnothing$, alors D est inclue dans le fermé $E \backslash O$, et donc $\overline{D} \subset (E \backslash O) \neq E$. $\square$

Exemple 1.10 *On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et $X = \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour tout intervalle $]a, b[$ non vide de $\mathbb{R}$, on note r_n le nombre décimal obtenu en gardant les n premiers chiffres après la virgule dans l'écriture décimal de $\frac{a+b}{2}$). Comme $a < \frac{a+b}{2} < b$, on a $r_n \in]a, b[$ pour n assez grand. Comme tout ouvert de E est réunion d'intervalles $]a, b[$, on obtient la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.*

De même $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car si r est un rationnel de $]a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}[$, alors $\sqrt{2}r$ est un irrationnel de $]a, b[$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide et que $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

1.2 Voisinages

1.2.1 Définition, systèmes fondamentaux

Définition 1.7 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de a dans E s'il existe un ouvert O de E vérifiant $a \in O \subset V$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.*

Proposition 1.9 *Les voisinages d'un point vérifient les propriétés suivantes.*

1) Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $a \in V$.

2) Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et tout $U \subset E$, si $V \subset U$ alors U est un voisinage de a.

3) toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.

PREUVE. 1) et 2) sont évidentes. Si $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des voisinages de a alors il existe $O_i \in \mathcal{O}$ tel que $a \in O_i \subset V_i$. On en déduit que $\cap_{1 \leqslant i \leqslant n} O_i$ est un ouvert contenant a et contenu dans $\cap_{1 \leqslant i \leqslant n} V_i$. □

Définition 1.8 *Une partie $\mathcal{V}'(a)$ de $\mathcal{V}(a)$ est appelée système fondamental de voisinage (noté SFV) de a si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{V}(a)$, il existe $V \in \mathcal{V}'(a)$ tel que $V \subset U$.*

Exemples 1.11 *les SFV suivants seront souvent utilisés*

1) *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique $\mathcal{V}'(a) = \{O \in \mathcal{O} / \, a \in O\}$ est un SFV de a,*

2) *Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $a \in \mathbb{R}$, alors $\big(]a - \epsilon, a + \epsilon[\big)_{\epsilon > 0}$ est un SFV de a. $\big(]a - 1/n, a + 1/n[\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un SFV de a dénombrable,*

3) *Soit $\overline{R}$ muni de la topologie usuelle, alors $\big(]a, +\infty]\big)_{a \in \mathbb{R}}$ est un SFV de $+\infty$. $\big(]n, +\infty]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un SFV dénombrable de $+\infty$.*

1.2.2 Caractérisations des ouverts et des fermés

Théorème 1.10 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. O est un ouvert de E si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points.*

PREUVE. Si O est un ouvert alors c'est évidemment un voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si O est un voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $a \in O$, il existe un ouvert $U_a \subset O$ tel que $a \in U_a$. D'où $O \subset \cup_a U_a \subset O$. Donc O est ouvert comme réunion d'ouverts. □

Proposition 1.11 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset E$. On a les égalités*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in E / \, \exists V \in \mathcal{V}(x) / V \subset A\} = \{x \in E / \, A \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Définition 1.9 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, $A \subset E$ et $x \in E$*

1) *On dit que x est adhérent à A si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $V \cap A \neq \emptyset$.*

2) x est un point isolé de A si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$.

3) x est un point d'accumulation de A si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble $(V \backslash \{x\}) \cap A$ est infini.

Remarque 1.3 *Les points de A sont adhérents à A mais un point adhérent à A n'est pas nécessairement dans A (par exemple 1 est adhérent à $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$).*

Un point isolé de A est dans A.

Les points isolés et les points d'accumulation de A sont des points adhérents à A.

Remarque 1.4 *Dans chacune de ces définitions, on peut remplacer $\mathcal{V}(x)$ par n'importe quel SFV $\mathcal{V}'(x)$ de x. Par exemple, x est adhérent à A si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}'(x)$, on a $V \cap A \neq \emptyset$.*

Proposition 1.12 *Soit A une partie de E. x est adhérent à A si et seulement si $x \in \overline{A}$ (i.e. l'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A). Autrement dit, on a*

$$\overline{A} = \{x \in E / \forall V \in \mathcal{V}(x),\, V \cap A \neq \emptyset\}$$

PREUVE. Montrons que l'ensemble S des points de E adhérents à A est un fermé de E. En effet, si $y \in E \backslash S$ alors il existe $V \in V(y)$ tel que $V \cap A = \emptyset$. Il existe donc un ouvert O de E tel que $y \in O$ et $O \cap A = \emptyset$. Comme O est un voisinage de chacun de ses points, on a $O \subset E \backslash S$. Et donc $E \backslash S$ est un ouvert de E. Comme $A \subset S$, on a $\overline{A} \subset S$.

Réciproquement, si $y \in E \backslash \overline{A}$, alors $E \backslash \overline{A}$ est un voisinage de y qui n'intercepte pas A (car $A \subset \overline{A}$) et donc $y \in E \backslash S$. D'où $E \backslash \overline{A} \subset E \backslash S$ et $S \subset \overline{A}$. □

Proposition 1.13 *Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée, on a $\sup A \in \overline{A}$. Si A n'est pas majorée alors $+\infty$ est dans l'adhérence de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

On a le même genre de propriété pour $\inf A$.

PREUVE. Si A est majorée alors $\sup A < \infty$. Comme $\big(]\sup A - \epsilon, \sup A + \epsilon[\big)_{\epsilon > 0}$ est un SFV de $\sup A$, et que $\sup A - \epsilon$ est strictement plus petit que $\sup A$, ça ne peut pas être un majorant de A, donc il existe $a \in A \cap]\sup A - \epsilon, \sup A]$ pour tout $\epsilon > 0$. On en déduit que $\sup A$ est dans l'adhérence de A dans $\mathbb{R}$.

Si A n'est pas majorée alors $\sup A = +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A \cap [n, +\infty] \neq \emptyset$. Or $[n, +\infty]$ est un SFV de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et donc $+\infty$ est dans l'adhérence de A dans $\overline{A}$. □

Exemples 1.12 *Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors tout point $\frac{1}{n}$ de A est un point isolé de A (car $A \cap]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[= \{\frac{1}{n}\}$) et 0 est un point d'accumulation de A dans $\mathbb{R}$ car $\big(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système de voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, $\frac{1}{k} \in A \cap \big(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\big) \backslash \{0\}$ pour tout $k \geqslant n$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R} \backslash \big(A \cup \{0\}\big)$. Si $x > 0$ alors $O =]\frac{1}{E(x)}, \frac{1}{E(x)+1}[$ est un voisinage de x (car $\frac{1}{x} \notin \mathbb{N}$) vérifiant $O \cap A = \emptyset$ et donc $x \notin \overline{A}$. Si $x < 0$, alors $O =]-\infty, 0[$ est un voisinage de x tel que $O \cap A = \emptyset$ et donc $x \notin \overline{A}$. On en déduit que $\overline{A} = \{0\} \cup A$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.2 *Soit $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Déterminer l'adhérence et les points d'accumulation de A dans $\mathbb{R}$.*

1.2.3 Espaces séparés (ou de Hausdorff)

Définition 1.10 *$(E, \mathcal{O})$ est séparé si et seulement si pour tout points distincts (x, y) de E, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Exemple 1.13 *1) Si E est muni de la topologie discrète alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des ouverts disjoints si x et y sont distincts, donc E est séparé,*

2) Si E est muni de la topologie grossière et $\#E \geqslant 2$, alors E n'est pas séparé (pour tout $x \in E$, E est le seul voisinage de x),

3) $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparé, $\overline{\mathbb{R}}$ aussi.

Proposition 1.14 *Si E est un espace topologique séparé alors pour tout $l \in E$, on a $\cap_{V \in \mathcal{V}(l)} V = \{l\}$.*

Preuve. Si $V \in \mathcal{V}(l)$ alors $l \in V$ donc $l \in \cap_{V \in \mathcal{V}(l)} V$. Réciproquement, si $y \in E \backslash \{l\}$ alors il existe $V \in \mathcal{V}(l)$ tel que $y \notin V$ et donc $y \notin \cap_{V \in \mathcal{V}(l)} V$. D'où $\cap_{V \in \mathcal{V}(l)} V \subset \{l\}$. □

Exercice 1.3 *Montrer que la seule topologie séparée sur un ensemble fini est la topologie discrète (indic. montrer que les singletons sont alors tous ouverts).*

Proposition 1.15 *Si $(E, \mathcal{O})$ est séparé et $\mathcal{V}'(x)$ est un SFV de x, alors x est un point d'accumulation de A si et seulement si $(V\backslash\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $V \in \mathcal{V}'(x)$.*

En particulier, $\overline{A}$ est la réunion disjointe des points isolés de A et des points d'accumulation de A (ce qui n'est pas vrai si E n'est pas séparé).

Preuve. Si x est un point d'accumulation alors pour tout $V \in \mathcal{V}'(x)$, $V\backslash\{x\} \cap A$ est infini donc non vide. Réciproquement, s'il existe $V_0 \in \mathcal{V}'(x)$, tel que $V_0\backslash\{x\} \cap A = \{y_1, \cdots, y_p\}$ est fini et si E est séparé, alors pour tout i il existe $V_i \in \mathcal{V}'(x)$ tel que $y_i \notin V_i$. Or $V = \cap_{0 \leqslant i \leqslant p} V_i$ est un voisinage de x et $V\backslash\{x\} \cap A = \emptyset$. On en déduit que si $(V\backslash\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $V \in \mathcal{V}'$ alors $(V\backslash\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ est infini pour tout $V \in \mathcal{V}'$ et donc x est un point d'accumulation. □

Remarque 1.5 *Dans le cas E non séparé, on peut avoir des points adhérents qui sont ni isolés, ni d'accumulation. Par exemple $E = \{1, 2\}$ muni de la topologie grossière n'est pas séparé et tout point de E est adhérent à $A = \{1\}$, mais aucun n'est ni isolé, ni d'accumulation.*

Exemples 1.14 *Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors tout point $\frac{1}{n}$ de A est un point isolé de A (car $A \cap]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[= \{\frac{1}{n}\}$) et 0 est un point d'accumulation de A dans $\mathbb{R}$ car $\left(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système de voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, $\frac{1}{2n} \in A \cap \left(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\right)\backslash\{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ est séparé. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left(A \cup \{0\}\right)$. Si $x > 0$ alors $O =]\frac{1}{E(x)}, \frac{1}{E(x)+1}[$ est un voisinage de x (car $\frac{1}{x} \notin \mathbb{N}$) vérifiant $O \cap A = \emptyset$ et donc $x \notin \overline{A}$. Si $x < 0$, alors $O =]-\infty, 0[$ est un voisinage de x tel que $O \cap A = \emptyset$ et donc $x \notin \overline{A}$. On en déduit que $\overline{A} = \{0\} \cup A$ dans $\mathbb{R}$.*

Soit $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle et $A = \mathbb{R}$. Alors $\overline{A} = \overline{R}$ car $\mathbb{R}$ n'étant pas majorée (minorée), on a $+\infty \in \overline{A}$ $(-\infty \in \overline{A})$. Tout point de $\overline{R}$ est un point d'accumulation de A.

Exercice 1.4 *Soit $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Déterminer l'adhérence et les points d'accumulation de A dans $\mathbb{R}$.*

1.3 Topologie induite, topologie produit

1.3.1 Topologie induite

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de E.

Proposition 1.16 $\left(A \cap O\right)_{O \in \mathcal{O}}$ *définit une topologie sur A appelée topologie induite sur A par la topologie de E.*

PREUVE. $A = A \cap E$ et $\varnothing = \varnothing \cap A$, donc $\left(A \cap O\right)_{O \in \mathcal{O}}$ contient A et $\varnothing$. Si $(A \cap O_i)_{i \in I}$ est une famille de $\left(A \cap O\right)_{O \in \mathcal{O}}$, alors $\cup_{i \in I}(A \cap O_i) = A \cap (\cup_{i \in I} O_i)$ donc $\left(A \cap O\right)_{O \in \mathcal{O}}$ est stable par réunion quelconque. De même, $\left(A \cap O\right)_{O \in \mathcal{O}}$ est stable par intersection finie. □

Proposition 1.17 *D'après la définition, les ouverts de A pour la topologie induite sont les traces sur (intersections avec) A des ouverts de E. De même, on a*

1) $\left(F \cap A\right)_{F \in \mathcal{F}}$ (où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés de E) est la famille des fermés de A pour la topologie induite par celle de E.

2) Soit $a \in A$, alors $\left(V \cap A\right)_{V \in \mathcal{V}(a)}$ est la famille des voisinages de a dans A pour la topologie induite (où $\mathcal{V}(a)$ est la famille des voisinages de a dans E).

3) Si $\mathcal{V}'$ est un SFV de a dans E alors $\{V \cap A, V \in \mathcal{V}'\}$ est un SFV de a dans A pour la topologie induite.

PREUVE.

1) F' est un fermé de A pour la topologie induite si et seulement si $A \backslash F'$ est un ouvert de A pour la topologie induite, i.e. si et seulement si il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $A \backslash F' = A \cap O$. Donc F' est un fermé de A pour la topologie induite si et seulement si il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $F' = A \backslash (A \backslash F') = A \backslash (A \cap O) = A \cap (E \backslash O)$, i.e. si et seulement si il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F' = A \cap F$.

2) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors il existe $O \in \mathcal{O}(E)$ tel que $a \in O \subset V$. Alors $a \in A \cap O \subset A \cap V$, et donc $A \cap V$ est un voisinage de a dans A pour la topologie induite. Réciproquement, si V' est un voisinage de a dans A pour la topologie induite, alors il existe un ouvert $A \cap O$ de A (i.e. $O \in \mathcal{O}(E)$) tel que $a \in A \cap O \subset V'$. Alors $V = O \cup V'$ vérifie $a \in O \subset V$, donc V est un voisinage de a dans E et on a $V \cap A = (O \cup V') \cap A = (O \cap A) \cup (V' \cap A) = (O \cap A) \cup V' = V'$.

3) Soit $V' = V \cap A$ un voisinage de a dans A pour la topologie induite, avec V voisinage de a dans E. Si $\mathcal{V}'$ est un SFV de a dans E alors il existe $W \in \mathcal{V}'$ tel que $W \subset V$ et donc $W \cap A \subset V'$. On en déduit que $\{V \cap A,\, V \in \mathcal{V}'\}$ est un SFV de a dans A pour la topologie induite.

□

Exemple 1.15 *Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A =]0, 1[$. Alors $]0, 1/2] = [-1/2, 1/2] \cap A$ est un fermé de A pour la topologie induite par celle de A. En particulier, l'adhérence de $]0, 1/2]$ dans A est $]0, 1/2]$ (alors quelle est $[0, 1/2]$ dans $\mathbb{R}$).*

Il faut retenir de cet exemple que les notions d'ouverts, fermés, adhérence, voisinages ne sont pas intrinsèques mais dépendent de la topologie de l'espace ambiant. Ainsi, dire que $[0, 1[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ a un sens mais dire que $[1 + \infty[$ est un fermé n'a pas de sens. Il faut préciser la topologie et l'ensemble dans lequel la partie est considérée ($[1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle, mais n'est pas un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ pour la topologie usuelle).

Proposition 1.18 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E munie de la topologie induite et $B \subset A$.*

Si B est un ouvert de E, alors B est un ouvert de A pour la topologie induite. Si A est ouvert dans E, alors B est ouvert dans A pour la topologie induite si et seulement si B est ouvert dans E.

Si B est fermée dans E alors B est fermée dans A pour la topologie induite. Si A est fermée dans E, alors B est fermée dans A pour la topologie induite si et seulement si B est fermée dans E.

Preuve. Si $B \in \mathcal{O}(E)$ alors, comme $B = B \cap A$, B est ouvert dans A pour la topologie induite. Si $A \in \mathcal{O}(E)$ et B est un ouvert dans A pour la topologie induite, alors il existe $O \in \mathcal{O}(E)$ tel que $B = O \cap A$, et donc B est un ouvert de E comme intersection de 2 ouverts de E.

La preuve est la même pour les fermés. □

Proposition 1.19 *Soit E un espace topologique et $X \subset E'$ des parties de E.*

Si $\overline{X}$ est l'adhérence de X dans E et $\overline{X}'$ l'adhérence de X dans E' (pour la topologie induite par celle de E) alors on a $\overline{X}' = \overline{X} \cap E'$.

Si $\operatorname{Int} X$ est l'intérieur de X dans E et $\operatorname{Int}' X$ l'intérieur de X dans E' (pour la topologie induite par celle de E) alors on a $\operatorname{Int}' X = \operatorname{Int} X \cap E'$

Preuve. $\overline{X}'$ est l'intersection des fermés de E' pour la topologie induite contenant X. Or ces fermés sont les intersections des fermés de E contenant X avec E'. Donc $\overline{X}'$ est l'intersection des fermés de E contenant X avec E'. D'où le résultat.

$\mathrm{Int}' X$ est la réunion des ouverts de E' pour la topologie induite contenus dans X. Or ces ouverts sont les intersections des ouverts de E contenus dans X avec E'. Donc $\mathrm{Int}' X$ est l'intersection des ouverts de E contenus X avec E'. D'où le résultat. □

Proposition 1.20 *Si $(E, \mathcal{O})$ est une topologie séparée et A une partie de E, alors la topologie induite sur A par la topologie de E est séparée.*

Preuve. Si x et y sont deux points distincts de A, alors il existe $U \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(x)$ et $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(y)$ tels que $U \cap V = \varnothing$. Or $U \cap A$ et $A \cap V$ sont des voisinages de x et y pour la topologie induite sur A, et sont disjoints. On en déduit que A est séparé pour la topologie induite. □

Proposition 1.21 (transitivité de la topologie induite) *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $B \subset A \subset E$ deux parties de E. On note $\mathcal{O}_A$ la topologie induite sur A par celle de E, $\mathcal{O}_B$ la topologie induite sur B par celle de E et $\mathcal{O}'_B$ la topologie induite sur B par $\mathcal{O}_A$. Alors on a $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}'_B$.*

Preuve. Si $U \in \mathcal{O}_B$, alors il existe $O \in \mathcal{O}(E)$ tel que $U = O \cap B$. Or $A \cap O \in \mathcal{O}_A$ et donc $U = B \cap O = B \cap (A \cap O) \in \mathcal{O}'_B$.

Réciproquement, si $U \in \mathcal{O}'_B$, alors il existe $O \in \mathcal{O}_A$ tel que $U = B \cap O$ et $O' \in \mathcal{O}(E)$ tel que $O = A \cap O'$. On a donc $U = B \cap (A \cap O') = B \cap O'$ et $U \in \mathcal{O}_B$. □

Définition 1.11 *Une partie D de E est dite discrète si et seulement si la topologie induite par celle de E est la topologie discrète.*

Proposition 1.22 *D est un partie discrète de E si et seulement si tous les points de D sont isolés.*

Preuve. Si D est discrète, alors pour tout $x \in D$, $\{x\}$ est un ouvert de D pour la topologie induite. Il existe donc un ouvert $O \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\{x\} = O \cap D$. On en déduit que x est isolé.

Réciproquement, si $x \in D$ est isolé alors il existe $V \in V(x)$ tel que $V \cap D = \{x\}$. On en déduit qu'il existe un ouvert O de E tel que $\{x\} = O \cap D$. En particulier, $\{x\}$ est un ouvert de D pour la topologie induite. Si tous les points de D sont isolés, alors tous les singletons de D sont ouverts dans D pour la topologie induite, et donc toute partie de D est ouverte pour la topologie induite. On en déduit que D est une partie discrète de E. □

Exemple 1.16 *La topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$ induit sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ et un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. Donc $A \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ ssi c'est un ouvert de $\mathbb{R}$. En revanche, si $A \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ alors c'est un fermé de $\mathbb{R}$ mais la réciproque est fausse.*

Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle alors $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ est un partie discrète (mais non fermée de $\mathbb{R}$). $\mathbb{Z}$ est aussi une partie discrète de $\mathbb{R}$ car $\{n\} =]n-1, n+1[\cap \mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$ pour la topologie induite.

Exercice 1.5 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset E$. Montrer que $a \in A$ est un point isolé de A si et seulement si $\{a\}$ est un ouvert de A pour la topologie induite par celle de E.*

1.3.2 Topologie produit

Soit $(E_1, \mathcal{O}_1)$ et $(E_2, \mathcal{O}_2)$ deux espaces topologiques.

Proposition-définition 1.12 *On appelle ouvert élémentaire de $E_1 \times E_2$ toute partie $\Omega \subset E_1 \times E_2$ de la forme $\Omega = O_1 \times O_2$, où O_1 est un ouvert de E_1 et O_2 est un ouvert de O_2. La famille formée de l'ensemble vide et des réunions quelconques d'ouverts élémentaires définit une topologie sur $E_1 \times E_2$ appelée topologie produit.*

Preuve. $E_1 \times E_2$ et $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ sont des ouverts élémentaires. De plus, $(O_1 \times O_2) \cap (O_1' \times O_2') = (O_1 \cap O_1') \times (O_2 \cap O_2')$, on en déduit que toute intersection finie d'ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire. On conclut grâce au théorème 1.3. □

Définition 1.13 *On appelle topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ la topologie obtenue par produit successif de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.23 *Soit $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ alors $\big(V_1 \times V_2\big)_{V_1 \in \mathcal{V}(a_1),\, V_2 \in \mathcal{V}(a_2)}$ est un système fondamentale de voisinage de a dans $E_1 \times E_2$. Plus généralement, si $\mathcal{V}'(a_1)$ est un SFV de a_1 et $\mathcal{V}'(a_2)$ est un SFV de a_2 alors $\big(V_1 \times V_2\big)_{V_1 \in \mathcal{V}'(a_1),\, V_2 \in \mathcal{V}'(a_2)}$ est un SFV de a.*

Preuve. Soit Ω un ouvert de la topologie produit contenant (a_1, a_2). Alors il existe une famille $\Omega_i = U_i \times V_i$ d'ouverts élémentaires tels que $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$. Or il existe $i_0 \in I$ tel que $(a_1, a_2) \in \Omega_{i_0} = U_{i_0} \times V_{i_0}$, et comme U_{i_0} est un ouvert de E_1 et $\mathcal{V}'(a_1)$ un SFV de a_1, il existe $W_1 \in \mathcal{V}'(a_1)$ tel que $W_1 \subset U_{i_0}$. De même, il existe $W_2 \in \mathcal{V}'(a_2)$ tel que $W_2 \subset V_{i_0}$. Alors $(a_1, a_2) \in W_1 \times W_2 \subset U_{i_0} \times V_{i_0} \subset \Omega$.
□

Exemple 1.17 *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La famille $\big(\Pi_{i=1}^n]a_i - \epsilon_i, a_i + \epsilon_i[\big)_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n}$ est un SFV de a. De même, la famille $\big(\Pi_{i=1}^n]a_i - \epsilon, a_i + \epsilon[\big)_{\epsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ est un SFV de a.*

Proposition 1.24 *Si E_1 et E_2 sont séparés alors $E_1 \times E_2$ est séparé.*

Preuve. Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points distincts de $E_1 \times E_2$ alors soit $x_1 \neq x_2$, soit $y_1 \neq y_2$. Si on suppose que $x_1 \neq x_2$ alors, comme E_1 est séparé, il existe $U_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_1)$ et $U_2 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_2)$ tel que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. On a donc $V_i = U_i \times E_2 \in \mathcal{V}_{E_1 \times E_2}\big((x_i, y_i)\big)$ et $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Si $y_1 \neq y_2$, on procède de même en utilisant que E_2 est séparé. □

Exemple 1.18 *La topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est séparée.*

1.4 Limites et continuité

1.4.1 Limites de fonctions

Définition 1.14 *Soit E et F deux espaces topologiques, $X \subset E$ non vide et $a \in \overline{X}$. Soit $f : X \to F$ une fonction et $l \in F$. On dit que f tend vers l quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_F(l)$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$ (i.e. tel que $U \cap X \subset f^{-1}(V)$).*

Remarque 1.6 *Dans la définition précédente, on peut remplacer $\mathcal{V}(l)$ et $\mathcal{V}(a)$ par n'importe quels SFV de l et a respectivement.*

L'exemple suivant montre que la limite n'est pas toujours unique.

Exemple 1.19 *Soit $f : E \to F$ une fonction et $a \in E$. Si F est muni de la topologie grossière, alors tout point $l \in F$ est une limite de f en $a \in E$.*

Théorème 1.25 *Si F est séparé, alors la limite est unique (quand elle existe).*

Preuve. Supposons que f admet deux limites $l \neq l'$ de f en a quand $x \in X$. Comme F est séparé, il existe des voisinages $W \in \mathcal{V}(l)$ et $W' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $W \cap W' = \varnothing$. Or par hypothèse, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V' \in \mathcal{V}$ tels que $f(V \cap X) \subset W$ et $f(V' \cap X) \subset W'$. On en déduit que $f(V \cap V' \cap X) \subset W \cap W' = \varnothing$, et donc $X \cap V \cap V' = \varnothing$. Ceci contredit $a \in \overline{X}$ car $V \cap V'$ est un voisinage de a. □

Définition 1.15 *Si F est séparé, on peut parler de* **la** *limite de f. Cette limite, quand elle existe, sera notée $\lim\limits_{x \to a,\, x \in X} f(x)$.*

Dans le cas particulier où $X = E \backslash \{a\}$ et $a \in \overline{X}$, on notera $\lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$.

Si $E = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et si $X = [a, +\infty[$, on note $\lim\limits_{x \to a,\, x \geqslant a} f(x)$.

Si $E = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et si $X =]a, +\infty[$, on note $\lim\limits_{x \to a,\, x > a} f(x)$.

Si $E = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et si $X = \mathbb{R} \backslash \{a\}$, on note $\lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$.

Si $E = \overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle et si $X = [b, a[$, avec $a = +\infty$, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Proposition 1.26 *Soit E un espace topologique, $a \in X \subset E$, F un espace topologique séparé et $f : X \to F$. Si $l = \lim\limits_{x \to a,\, x \in X} f(x)$ existe alors $l = f(a)$.*

Preuve. Par hypothèse, pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(X \cap U) \subset V$. Or, pour tout $U \in \mathcal{V}(a)$, on a $a \in X \cap U$ (car on a supposé $a \in X$), et donc $f(a) \in V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$. Comme F est séparé, on a $\{l\} = \cap_{V \in \mathcal{V}(l)} V$, d'où $l = f(a)$. □

Définition 1.16 *Soit E un espace topologique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $x_n \in V$.*

Si F est séparé, la limite l est unique et on note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Proposition 1.27 *Soit E, F_1 et F_2 des espaces topologiques, X une partie de E et $a \in \overline{X}$, $f_1 : X \to F_1$, $f_2 : X \to F_2$ des fonctions et $f : X \to F_1 \times F_2$ la fonction définie par $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$.*

Alors $f(x)$ tend vers (l_1, l_2) quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si $f_1(x)$ tend vers l_1 quand x tend vers a en restant dans X et $f_2(x)$ tend vers l_2 quand x tend vers a en restant dans X.

Preuve. Cela découle facilement du fait que $\big(V_1 \times V_2\big)_{V_1 \in \mathcal{V}(l_1),\, V_2 \mathcal{V}(l_2)}$ est un SFV de (l_1, l_2). □

1.4.2 Limites de suites

La notion de limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace topologique est un cas particulier de limite de fonction.

Définition 1.17 *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E et $X : \mathbb{N} \to E$ est la fonction définie par $X(n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} X(n)$ où $\mathbb{N}$ est muni de la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}$ (on a bien $+\infty \in \overline{\mathbb{N}}$). Autrement dit, $\lim x_n = l$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geqslant m$.*

Comme $+\infty$ est le seul point adhérent à $\mathbb{N}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ sans être dans $\mathbb{N}$, la seule notion de limite intéressante pour les suites est la limite en $+\infty$.

Proposition 1.28 *Soit F_1 et F_2 deux espaces topologiques, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(F_1 \times F_2\big)^{\mathbb{N}}$ une suite de $F_1 \times F_2$ et $l = (l_1, l_2) \in F_1 \times F_2$.*

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l_1 et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l_2.

1.4.3 Continuité en un point

Définition 1.18 *Soit E et F deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une fonction et $a \in E$. On dit que f est continue en a si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_F(f(a))$, il existe $U \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $f(U) \subset V$ (i.e. si et seulement si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a).*

Ici encore on peut remplacer $\mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{V}(f(a))$ par des SFV de a et $f(a)$.

On en déduit directement la propriété suivante.

Proposition 1.29 *Si a est un point isolé de E alors f est continue en a.*

Les liens entre continuité et limites sont donnés par les propositions suivantes.

La première découle directement des définitions.

Proposition 1.30 *$f : E \to F$ est continue en a si et seulement si $f(a)$ est une limite de f en a.*

Dans le cas où F est séparé, alors $f(a)$ est la seule limite possible. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.31 *Si F est un espace séparé, alors $f : E \to F$ est continue en $a \in E$ si et seulement si f a une limite en a. On a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Preuve. Si f est continue en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ par définition, et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. Réciproquement, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors cette limite est égale à $f(a)$ car $a \in E$ et F est séparé. □

Proposition 1.32 *Soit $f : E \to F$ une application continue en $a \in E$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ dans F.*

On dit alors que f est séquentiellement continue en a.

Remarque 1.7 *On verra que si E est un espace métrique, alors $f : E \to F$ est continue en a si et seulement si f est séquentiellement continue en a.*

C'est vrai dès que a admet un SFV dénombrable, mais faux en général.

Proposition 1.33 *Soit E, F et G trois espaces topologiques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions et $a \in E$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Preuve. Soit $W \in \mathcal{V}\big(g \circ f(a)\big)$. Comme g est continue en $f(a)$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}\big(f(a)\big)$ tel que $g(V) \subset W$ et comme f est continue en a, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. On en déduit que $g \circ f(U) \subset W$. □

La proposition suivante est évidente et est très souvent utilisée (parfois même sans s'en rendre compte).

Proposition 1.34 *Soit E et F deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une fonction et $a \in E$. Si $a \in E' \subset E$ et $f(E') \subset F' \subset F$ et f est continue en a, alors $\bar{f} : E' \to F'$ définie par $\bar{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in E'$ est aussi continue en a (où E' et F' sont munis des topologies induites par celles de E et F).*

PREUVE. si $V' \in \mathcal{V}_{F'}\big(f(a)\big)$, alors il existe $V \in \mathcal{V}_F\big(f(a)\big)$ tel que $V' = V \cap F'$. Or f est continue en a et donc il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Alors $U \cap E' \in \mathcal{V}_{E'}(a)$ et on a $\bar{f}(U \cap E') \subset f(U) \cap f(E') \subset V \cap F' = V'$. Donc $\bar{f}$ est continue en a. □

Proposition 1.35 *Soit E, F_1 et F_2 des espaces topologiques et $f : E \to F_1 \times F_2$ définie par $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$.*

Alors f est continue en a si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a.

1.4.4 Continuité globale

Définition 1.19 *Soit E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$. On dit que f est continue sur E si et seulement si f est continue en tout point de E.*

Proposition 1.36 *f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.*

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

PREUVE. Supposons f continue. Soit O un ouvert de F. Si $f^{-1}(O)$ est vide alors c'est un ouvert. Sinon, soit x un point quelconque de $f^{-1}(O)$. Comme O est un ouvert qui contient $f(x)$, c'est un voisinage de $f(x)$. Par continuité de f en x, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(V) \subset O$. On en déduit que $V \subset f^{-1}(O)$ et donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage de chacun de ses points.

Réciproquement, soit $x \in E$, on montre la continuité de f en x. Soit O un voisinage ouvert de $f(x)$ (rappelons que les ouverts contenant a forment un SFV de a). Alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E contenant x, c'est donc un voisinage de x. Or $f\big(f^{-1}(O)\big) \subset O$, donc f est continue en x.

Comme $f^{-1}(F \backslash O) = E \backslash f^{-1}(O)$, on en déduit facilement la proposition pour les fermés. □

Proposition 1.37 *Soit E, F et G trois espaces topologiques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions et $a \in E$. Si f est continue sur E et g est continue sur F alors $g \circ f$ est continue sur E.*

Là encore, la proposition suivante est évidente et souvent utilisée.

Proposition 1.38 *Soit E et F deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une fonction, $E' \subset E$ et $f(E') \subset F' \subset F$. Si f continue sur E, alors $\bar{f} : E' \to F'$ définie par $\bar{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in E'$ est aussi continue sur E' (où E' et F' sont munis des topologies induites par celles de E et F).*

PREUVE. Exercice. □

Exemples 1.20 *1) Si E est un espace topologique, $F = \mathbb{R}$ et f est continue sur E. Alors $\{x \in E / f(x) \geqslant \alpha\}$ et $\{x \in E / f(x) = \alpha\}$ sont des fermés de E, $\{x \in E / f(x) > \alpha\}$ est un ouvert de E.*

2) $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $[1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $f^{-1}([1, +\infty[) =]0, 1]$ est bien un fermé de $\mathbb{R}^*$ (mais pas de $\mathbb{R}$, mais cela ne contredit pas la théorème car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$).

Remarque 1.8 *Attention, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (de même pour les fermés). Par exemple on a $\sin(]-10, 13[) = [-1, 1]$ alors que le sinus est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.20 *Une fonction $f : E \to F$ est dite ouverte si et seulement si l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Une fonction $f : E \to F$ est dite fermée si et seulement si l'image de tout fermé de E est un fermé de F.

Exemple 1.21 *Soit E_1 et E_2 deux espaces topologiques et $E = E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit. Soit $\pi_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$la fonction définie par $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$. Pour tout ouvert O de E_1, $\Pi^{-1}(O) = O \times E_2$ est un ouvert (élémentaire) de $E_1 \times E_2$, donc π_1 est continue.*

Montrons que π_1 est ouverte: Soit O un ouvert de $E_1 \times E_2$, alors $O = \cup_{i \in I} \Omega_i$, où les Ω_i sont des ouverts élémentaires, i.e. de la forme $U_i \times V_i$ où U_i est un ouvert de E_1. On en déduit que $\pi_1(O) = \cup_{i \in I} \pi_1(\Omega_i) = \cup_{i \in I} \pi_1(U_i \times V_i) = \cup_{i \in I} U_i$ et donc $\pi_1(O)$ est un ouvert de E_1 comme réunion d'ouverts de E_1. π_1 est donc bien ouverte.

Rappelons les propriétés suivantes:

$$f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i) \quad f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$$
$$f(\cup_i B_i) = \cup_i f(B_i) \quad f(\cap_i B_i) \subset \cap_i f(B_i)$$

Définition 1.21 *$f : E \to F$ est un homéomorphisme si et seulement si f est continue, bijective et f^{-1} est continue. On dit que E est F sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme de E sur F.*

Proposition 1.39 *Si $f : E \to F$ est un homéomorphisme et $g : F \to G$ est un homéomorphisme alors $g \circ f : E \to G$ est un homéomorphisme.*

Proposition 1.40 *Soit $(E, \mathcal{O}_E)$ et $(F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques. Si $f : E \to F$ est un homéomorphisme, alors $f(\mathcal{O}_E) = \{f(U), U \in \mathcal{O}_E\} = \mathcal{O}_F$ (i.e. l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F et tout ouvert de F est l'image d'un ouvert de E).*

De même, f réalise une bijection entre les fermés de E et les fermés de F.

Preuve. Si $U \in \mathcal{O}_E$ et $g = f^{-1}$, alors $f(U) = g^{-1}(U)$ est un ouvert de F car g est continue et donc $f(\mathcal{O}_E) \subset \mathcal{O}_F$. Si $V \in \mathcal{O}_F$ alors $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_E$ (car f est continue) et $f(U) = V$ et donc $f(\mathcal{O}_E) \supset \mathcal{O}_F$.

On procède de même pour les parties fermées. □

Proposition 1.41 *Si E et F sont deux espaces topologiques et si $f : E \to F$ est un homéomorphisme, alors pour tout $A \subset E$, la fonction $g = f_{|A}$ est un homéomorphisme de A sur $f(A)$ munis des topologies induites par celles de E et F.*

Preuve. g est bien une bijection de A sur $f(A)$ et g et g^{-1} sont continue comme restrictions de fonctions continues. □

Exemple 1.22 *Les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $\mathbb{R}$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ et $]a, b[$ munis de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.*

$f(x) = x + a - a'$ *est un homéomorphisme de* $]a', +\infty[$ *sur* $]a, +\infty[$.
$f(x) = -x$ *est un homéomorphisme de* $]0, +\infty[$ *sur* $]-\infty, 0[$.
$f(x) = a' + (b' - a')\frac{x-a}{b-a}$ *est un homéomorphisme de* $]a, b[$ *sur* $]a', b'[$.
$f(x) = 1/x$ *est un homéomorphisme de* $]0, 1[$ *sur* $]1, +\infty[$.
$f(x) = \arctan(x)$ *est un homéomorphisme de* $]-\pi/2, \pi/2[$ *sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.9 *Une fonction f peut-être continue et bijective sans que f^{-1} soit continue. Par exemple*

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ x & \mapsto & e^{ix} \end{array}$$

est un bijection continue mais f^{-1} n'est pas continue (car si $x_n = e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}$ alors $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ et $f^{-1}(x_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(x_n) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1)$).

1.5 Compléments

1.5.1 Topologie quotient

Soit X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : x \in X \mapsto [x] \in X/\mathcal{R}$ la projection canonique.

Définition 1.22 *La topologie quotient est la topologie de $X/\mathcal{R}$ définit par O est ouvert de $X/\mathbb{R}$ si et seulement si $\pi^{-1}(O)$ est un ouvert de X.*

Remarque 1.10 *Cela définit bien une topologie car $\pi^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} O_i\big) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(O_i)$ et $\pi^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} O_i\big) = \bigcap_{i\in I} \pi^{-1}(O_i)$. De plus, $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est alors continue. C'est la plus fine topologie de $X/\mathcal{R}$ qui rende la projection canonique continue.*

Notez aussi qu'en général l'image d'un ouvert de X par π n'est pas un ouvert de $X/\mathcal{R}$.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.42 *Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Si $f(x) = f(x')$ dès que $x\mathcal{R}x'$, alors il existe une unique $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ telle que $f = \bar{f}\circ\pi$. De plus, f est continue si et seulement si $\bar{f}$ est continue.*

Preuve. L'existence de $\bar{f}$ est le théorème de l'isomorphisme. Si $\bar{f}$ est continue alors $f = \bar{f} \circ \pi$ est continue comme composée de fonction continue. Si f est continue alors pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O) = \pi^{-1}\big(\bar{f}^{-1}(O)\big)$ est un ouvert de X, et donc, par définition de la topologie quotient, $\bar{f}^{-1}(O)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. On en déduit que $\bar{f}$ est continue. □

Exemple 1.23 *Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalnce sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}x'$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + 2k\pi$. On munit $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de la topologie quotient et $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$. Alors la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} \in \mathbb{S}^1$ est continue et passe au quotient en une bijection $\bar{f} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ qui est continue. En fait $\bar{f}$ est un homéomorphisme (pour le montrer on peut soit appliquer le théorème d'inversion locale à f, soit remarquer que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est compact, car égal à $\pi([0, 2\pi])$).*

1.5.2 Topologie engendrée par une famille d'applications

Proposition 1.43 *Soit* $(F_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *une famille d'espace topologiques,* E *un ensemble et* $f_i : E \to F_i$ *une famille d'applications. Il existe une plus petite topologie sur* E *pour laquelle toutes les applications* f_i *sont continues, on l'appelle la topologie définie par la famille* f_i*. C'est la topologie engendrée par la famille* $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(O_i)/ O_i \in \mathcal{O}_i\}$.

Preuve. Une topologie sur E rend toutes les applications continues si et seulement si elle contient tous les éléments de $\mathcal{A}$. La topologie engendrée par $\mathcal{A}$ est donc la plus petite topologie vérifiant cette propriété. □

Proposition 1.44 *Soit* $f_i : E \to X_i$ *une famille d'applications. On suppose* E *muni de la topologie définie par la famille* $(f_i)_{i\in I}$*. Alors une fonction* $f : Y \to E$ *est continue si et seulement si* $f_i \circ f$ *est continue pour tout* $i \in I$.

Preuve. Si f est continue alors $f_i \circ f$ est continue comme composée d'applications continues.

Réciproquement, si toutes les applications $f_i \circ f$ sont continues, alors tout ouvert Ω de E est une réunion d'ensembles de la forme $f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, où $\{i_1, \cdots, i_k\}$ est une famille finie d'éléments de I et U_{i_j} est un ouvert de X_{i_j}. Alors $f^{-1}(\Omega)$ est réunion d'ensembles de la forme

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\big) &= f^{-1}\big(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\big) \cap \cdots \cap f^{-1}\big(f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\big) \\ &= (f_{i_1} \circ f)^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap (f_{i_k} \circ f)^{-1}(U_{i_k}) \end{aligned}$$

qui est un ouvert de Y puisque toutes les fonctions $f_i \circ f$ sont continues. On en déduit que f est continue. □

Définition 1.23 *Une famille* $f_i : E \to F_i$ *est dite séparante si pour tout* $(x, y) \in E$ *avec* $x \neq y$*, il existe* $i \in I$ *tel que* $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Proposition 1.45 *Si la famille* $f_i : E \to F_i$ *est séparante, et si tous les* F_i *sont des espaces topologiques séparés, alors la topologie induite sur* E *par la famille* (f_i) *est une topologie séparée.*

Preuve. Soit $x \neq x'$ sont des points de E et si $f_i(x) \neq f_i(x')$, alors il existe des ouverts disjoints U et V de F_i tels que $f_i(x) \in U$ et $f_i(x') \in V$. On a alors $x \in f_i^{-1}(U)$ et $x' \in f_i^{-1}(V)$, et $f_i^{-1}(U)$ et $f_i^{-1}(V)$ sont des ouverts disjoints de E pour la topologie définie par les applications $(f_i)_{i\in I}$. □

Remarque 1.11 *Si $(E_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques et $f_i : (x_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} E_j \mapsto x_i \in E_i$, alors la topologie de $\prod_{j\in I} E_j$ définie par la famille d'applications $(f_j)_{j\in I}$ est la topologie produit.*

Si $A \subset E$ et $i : x \in A \mapsto x \in E$ est l'injection canonique, alors la topologie de A induite par i est la topologie induite sur A par celle de E.

1.5.3 Valeurs d'adhérence

La notion de valeur d'adhérence est une version faible de la notion de limite qui s'avère très utile, en particulier pour l'étude des suites.

Définition 1.24 *Soit X, Y deux espaces topologiques, $a \in X$ et $f : X \to Y$ une application. $y \in Y$ est une valeur d'adhérence de f en a si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(y)$ et pour tout voisinage $U \in \mathcal{V}(a)$, on a $(U\backslash\{a\}) \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$ (i.e. $f(U\backslash\{a\}) \cap V \neq \varnothing$).*

Proposition 1.46 *L'ensemble des valeurs d'adhérence de f en a est $\bigcap_{U\in\mathcal{V}(a)} \overline{f(U\backslash\{a\})}$. C'est donc un fermé de Y.*

PREUVE. y est valeur d'adhérence de f en a si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(y)$ et pour tout voisinage $U \in \mathcal{V}(a)$, on a $f(U\backslash\{a\}) \cap V \neq \varnothing$. Donc y est valeur d'adhérence de f en a si et seulement si pour tout voisinage $U \in \mathcal{V}(a)$, on a $y \in \overline{f(U\backslash\{a\})}$ si et seulement si $y \in \bigcap_{V\in\mathcal{V}(a)} \overline{f(V\backslash\{a\})}$. $\square$

Dans le cas d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. $X = \overline{\mathbb{N}}$ et $f(n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(+\infty) = x_0$ et $a = +\infty$), y est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$, et pour tout $n \in_N$, il existe $m \geqslant n$ tel que $x_m \in V$. L'ensemble des valeur d'adhérence de la suite (x_n) est alors $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{x_k,\, k \geqslant n\}}$.

Toute limite d'une suite extraite de (x_n) est une valeur d'adhérence de la suite (x_n). On verra que dans les espaces métriques, toute valeur d'adhérence de (x_n) est la limite d'une suite extraite de (x_n).

Sommaire

Chapitre 2

Espaces métriques

2.1 Généralités

Définition 2.1 *Soit E un ensemble non vide. Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes.*

1) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,

2) pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $d(x, y) = d(y, x)$ (i.e. d est symétrique),

3) pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times E$, on a $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (i.e. d vérifie l'inégalité triangulaire).

Le couple (E, d) est appelé un espace métrique.

Si d est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et vérifie les trois conditions précédentes on dit que d est un écart.

Proposition 2.1 *Pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times E$, on a*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z).$$

Preuve. On a $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z)$, d'où $d(x,y) - d(y,z) \leqslant d(x,z)$. De même, on a $d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z)$, d'où $d(y,z) - d(x,y) \leqslant d(x,z)$. $\square$

Exemple 2.1 *Soit E un ensemble non vide. On pose $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x,y) = 0$. d est une distance appelée la distance triviale.*

Exemple 2.2 *Sur $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ est appelée la distance usuelle. Sur $\mathbb{C}$, la distance usuelle est donnée par $d(x,y) = |x-y|$.*

Exemple 2.3 *Sur $\mathbb{R}^n$ on définit trois distances usuelles définies, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, par*

$$D_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, D_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}, D_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

L'inégalité triangulaire pour D_2 provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left(\sum_i a_i b_i\right) \leqslant \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a les inégalités

$$D_\infty(x,y) \leqslant D_1(x,y) \leqslant \sqrt{n} D_2(x,y) \leqslant n D_\infty(x,y)$$

Exemple 2.4 *Soit $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des espaces métriques. Sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ on définit trois distances usuelles par les formules suivantes*

$$D_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), D_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\Big)^{\frac{1}{2}}, D_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i).$$

Exemple 2.5 *Sur $\overline{\mathbb{R}}$ la fonction $d(x,y) = |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$, où $\mathrm{Arctan}(+\infty) = \pi/2$ et $\mathrm{Arctan}(-\infty) = -\pi/2$ est une distance.*

Exemple 2.6 *On appelle valuation sur un anneau A toute application $v : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions*

1) $v(a) = +\infty$ *si et seulement si* $a = 0$,

2) $v(ab) = v(a) + v(b)$,

3) $v(a+b) \geqslant \inf\big(v(a), v(b)\big)$.

A tout anneau valué (A, v) on associe une distance en posant $d(a,b) = e^{-v(a-b)}$ (ou plus généralement $\alpha^{v(a-b)}$ avec $\alpha \in]0,1[$). En posant $e^{-\infty} = 0$, on vérifie facilement que, pour tout $(a,b,c) \in A \times A \times A$, on a l'inégalité triangulaire forte suivante $d(a,c) \leqslant \max\big(d(a,b), d(b,c)\big)$ (on dit que d est une ultra-distance et que (A,d) est un espace ultra-métrique).

Un exemple classique d'anneau valué est $A = K[X]$, où $v(\sum_i a_i X^i) = \min\{i \in \mathbb{N} / a_i \neq 0\}$ et $v(0) = +\infty$.

De même, l'anneau $\mathbb{Q}$ peut-être d'une famille naturelle de valuations. Si p est un nombre premier, on définit la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ de la manière suivante:

tout nombre rationnel x non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = p^{\alpha}\frac{a}{b}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $a \wedge b = 1$, $a \wedge p = 1$ et $b \wedge p = 1$. On pose alors $v_p(x) = \alpha$ (et $v_p(0) = +\infty$) et on note d_p la distance associée.

Définition 2.2 *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x,y) \in A \times A$, on a $d(x,y) \leqslant M$.*

Proposition 2.2 *A est bornée si et seulement si il existe $u \in E$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \in A$, on a $d(u,x) \leqslant R$.*

PREUVE. Si A est borné alors on peut prendre $u = x_0$ un point fixé de A et $R = M$. Réciproquement, si il existe $u \in E$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \in A$, on a $d(u,x) \leqslant R$. Alors d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $(x,y) \in A \times A$, on a $d(x,y) \leqslant d(x,u) + d(u,y) \leqslant 2R$ et donc $M = 2R$ convient. □

Définition 2.3 *Soit A une partie non vide et bornée de E. On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A) = \sup\limits_{(x,y) \in A \times A} d(x,y)$.*

Définition 2.4 *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$.*

Définition 2.5 *Soit A, B deux parties de E. On appelle distance entre A et B le nombre $d(A,B) = \inf\limits_{(a,b) \in A \times B} d(a,b)$. On a*

$$d(A,B) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b) = \inf_{a \in A} d(a,B) = \inf_{b \in B} d(A,b).$$

Définition 2.6 *Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$. On dit que f est une isométrie si et seulement si f est bijective et pour tout $(x,y) \in E \times E$, $d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y)$.*

Remarque 2.1 *En fait si pour tout $(x,y) \in E \times E$, $d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y)$, alors f est injective (car si $f(x) = f(y)$ alors $d(x,y) = d'\big(f(x), f(y)\big)$), mais n'est pas surjective en général.*

Exemple 2.7 *Si $\mathbb{C}$ est muni de la distance usuelle et $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance D_2, alors l'application $F(x,y) = x + iy$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.*

2.2 Topologie associée à une distance

Définition 2.7 *Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$.*

L'ensemble $B(x,r) = \{y \in E / \, d(x,y) < r\}$ est appelé boule ouverte de centre x et de rayon r.

L'ensemble $B'(x,r) = \{y \in E / \, d(x,y) \leqslant r\}$ est appelé boule fermée de centre x et de rayon r .

Remarque 2.2 *On a toujours $B(x,r) \subset B'(x,r)$. $B(x,r)$ peut se réduire à $\{x\}$ (par exemple dans $\mathbb{Z}$ pour la distance usuelle, on a $B(k, 1/2) = B'(k, 1/2) = \{k\}$). Notez que des rayons (et des centres) différents peuvent donner le même ensemble.*

Le lemme suivant est évident mais sera très souvent utilisé.

Lemme 2.3 *Soit (E,d) un espace métrique, $(x,y) \in E \times E$ et $R > 0$.*

Si $y \in B(x,R)$ et $r \leqslant R - d(x,y)$ alors $B(y,r) \subset B(x,R)$.

Si $y \in B'(x,R)$ et $r \leqslant R - d(x,y)$ alors $B'(y,r) \subset B'(x,R)$.

Si $R \geqslant r + d(x,y)$, alors $B(x,R) \supset B(y,r)$ et $B'(x,R) \supset B'(y,r)$.

Si $r + R \leqslant d(x,y)$ alors $B(x,r) \cap B(y,R) = \varnothing$.

Si $r + R < d(x,y)$ alors $B'(x,r) \cap B'(y,R) = \varnothing$.

Preuve. Si $y \in B(x,R)$, alors $d(x,y) < R$. Si $z \in B(y,r)$, alors $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r \leqslant R$ et donc $B(y,r) \subset B(x,R)$. Les preuves des autres inclusions sont similaires et sont laissées en exercice. $\square$

Exemple 2.8 *1) Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r > 0$, on a $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}/ |x-y| < r\} =]x-r, x+r[$. Réciproquement, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a $]a,b[= B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$ (et le centre et le rayon sont uniques). Donc les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$. De même l'ensemble des boules fermées coïncide avec les intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$.*

2) Soit $\overline{\mathbb{R}}$, muni de la distance $d(x,y) = |\mathrm{Arctan}x - \mathrm{Arctan}y|$. Les boules ouvertes de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les ensembles suivants $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]a,+\infty]$, $]-\infty,a[$, $[-\infty,a[$, $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ (où a et b sont des réels). Notez que pour les ensembles $]a,+\infty]$ et $[-\infty,a[$, il n'y pas unicité du centre et du rayon permettant de les écrire comme des boules ouvertes de $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.4 *Soit (E,d) un espace métrique et O une partie non vide de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) O est réunion de boules ouvertes,

2) pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$.

Preuve. 2) $\Rightarrow$ 1) Pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x,r_x) \subset O$, et donc $\cup_{x\in O} B(x,r_x) \subset O$. Comme $x \in B(x,r_x)$ pour tout $x \in O$, on a aussi $O \subset \cup_{x\in O} B(x,r_x)$.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $O = \cup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ alors pour tout $x \in O$, il existe $i \in I$ tel que $x \in B(x_i,r_i)$. Pour $r = r_i - d(x,x_i) > 0$, on a $B(x,r) \subset B(x_i,r_i) \subset O$. □

Remarque 2.3 *on convient dans la suite que $\cup_{i\in\varnothing} B(x_i,r) = \varnothing$.*

Théorème 2.5 *L'ensemble des parties de E vérifiant les propriétés 1) ou 2) de la proposition précédente, définit une topologie sur E. On l'appelle topologie associée à la distance d.*

Preuve. Soit $\mathcal{O} = \{$ensembles des parties de E vérifiant 1) ou 2)$\}$. Seule la stabilité par intersection finie pose problème. Soit $(O_1,\cdots,O_k) \in \mathcal{O}^k$ et $x \in \cap_{1\leqslant i\leqslant k} O_i$. Il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset O_i$. Alors $B\big(x,\min(r_i)\big) \subset \cap_{1\leqslant i\leqslant k} O_i$. □

Définition 2.8 *Un espace topologique $(E,\mathcal{O})$ est dit métrisable s'il existe une métrique d sur E telle que la topologie associée à d soit égale à $\mathcal{O}$.*

Exemples 2.9 *1) La topologie associée à la distance usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie usuelles de $\mathbb{R}$. Il existe d'autres distances sur $\mathbb{R}$ dont la topologie associée est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (par exemple $d(x,y) = |\mathrm{Arctan} x - \mathrm{Arctan} y|$).*

2) La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ induite par la distance $d(x,y) = |\mathrm{Arctan} x - \mathrm{Arctan} y|$ est la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$.

3) La topologie associée à la distance triviale est la topologie discrète.

Proposition 2.6 *Soit (E,d) un espace métrique*

1) toute boule ouverte de E est une partie ouverte de E.

2) toute boule fermée de E est une partie fermée de E.

PREUVE. La propriété 1) est vraie par définition de la topologie associée à d.

Soit $y \in E \backslash B'(x,r)$, alors $d(x,y) > r$. Soit $l = d(x,y) - r$, alors $B(y,l) \subset E \backslash B'(x,r)$ (si $d(y,z) < l$ alors $d(z,x) \geqslant d(y,x) - d(z,y) > d(y,x) - l = r$). □

Remarque 2.4 *Comme $B(x,r) \subset B'(x,r)$ et que $B'(x,r)$ est fermée, on a $\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r)$. Mais l'adhérence de $B(x,r)$ n'est, en général, pas égal à $B'(x,r)$. De même, on a $B(x,r) \subset \mathrm{Int}\, B'(x,r)$ et l'intérieur de $B'(x,r)$ n'est, en général pas égal à $B(x,r)$.*

Exemple 2.10 *Soit $\mathbb{Z}$ muni de la distance usuelle. Alors $B(0,1) = \{0\}$, donc $\overline{B(0,1)} = \{0\}$. Or $B'(0,1) = \{-1,0,1\}$. De même, $\int B'(0,1) = \{-1,0,1\}$ (car c'est un ouvert de $\mathbb{Z}$ pour la distance usuelle) contient strictement $B(0,1) = \{0\}$.*

Proposition 2.7 *Soit (E,d) un espace métrique muni de la topologie associée à d. Pour tout $a \in E$, $\left(B(a,\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un SFV dénombrable de a.*

Théorème 2.8 *Tout espace métrique est séparé.*

PREUVE. Si $x \neq y$ et $l = d(x,y)$, alors $B(x,l/2) \cap B(y,l/2) = \varnothing$. □

2.2.1 Distances topologiquement équivalentes, distances équivalentes

Définition 2.9 *Soit E un ensemble, d et d' deux distances sur E. On dit que d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si les topologies associées à d et d' coïncident.*

Définition 2.10 *On dit que deux distances d et d' sont équivalentes si et seulement si il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que $Ad'(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant Bd'(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E \times E$.*

Proposition 2.9 *Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes (la réciproque est fausse).*

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ les topologies associées à d et d', $O \in \mathcal{O}$ et $x \in O$. Comme O est un ouvert pour la distance d, il existe $r > 0$ tel que $B_d(x,r) \subset O$. Si $d'(x,y) < R/B$ alors $d(x,y) < R$, donc $B_{d'}(x,R/B) \subset B_d(x,R) \subset O$. Comme x est un point quelconque de O, on en déduit que $O \in \mathcal{O}'$. D'où $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. De même, on montre $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. $\square$

Exemple 2.11 *Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et d' la distance définie par $d'(x,y) = |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$. Alors $Id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$ est un homéomorphisme (en utilisant la continuité de $\tan$ et Arctan) et donc les topologies sont les mêmes et d et d' sont topologiquement équivalentes, mais elles ne sont pas équivalentes car $\mathbb{R}$ est borné pour d' mais non borné pour d.*

Exercice 2.1 *Montrer que si (E,d) est un espace métrique, alors $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une distance sur E, bornée et topologiquement équivalente à d.*

Théorème 2.10 *Soit $\big((E_i,d_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'espaces métriques. Les trois métriques D_1, D_2 ou D_∞ définies plus haut sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont équivalentes et donc définissent la même topologie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.*

2.2.2 Distance induite, distance et topologie produit

Définition 2.11 *Soit (E,d) un espace métrique, $X \subset E$ et d' la restriction de d à $X \times X$ ($d' = d_{|X \times X}$). d' est une distance sur X appelée la distance induite sur X par d.*

Proposition 2.11 *Soit (E, d) un espace métrique muni de la topologie associée à d. On note $\mathcal{O}$ la topologie de X induite par la topologie de E et $\mathcal{O}'$ la topologie sur X associée à la métrique d' induite sur X par d. Alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, i.e. la topologie associée à la distance induite est la même que la topologie induite par la topologie de E.*

PREUVE. Cette proposition découle facilement de l'égalité $B_{d'}(x, r) = B_d(x, r) \cap X$ et de la définition de la topologie associée à une métrique. $\square$

Soit $\big((E_i, d_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'espace métrique et $\mathcal{O}_i$ la topologie sur E_i associée à d_i. On peut munir $E_1 \times \cdots \times E_n$ de la topologie produit des topologies $\mathcal{O}_i$ et de trois métriques D_1, D_2 ou D_∞.

Théorème 2.12 *La topologie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ obtenue par produit des topologies sur E_i associée à d_i est la même que la topologie associée à l'une des trois distances D_1, D_2, D_∞.*

PREUVE. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ un point de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ et $r > 0$. On a

$$\begin{aligned} B_{D_\infty}(x, r) &= \{y \in E / \, D_\infty(x, y) < r\} = \{y \in E / \, \max_i d_i(x_i, y_i) < r\} \\ &= \{y \in E / \, d_i(x_i, y_i) < r, \forall i\} \end{aligned}$$

D'où $B_{D_\infty}(x, r) = \Pi_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, r)$.

Soit $\mathcal{O}$ la topologie produit des topologies $\mathcal{O}_i$ associées aux distances d_i et $\mathcal{O}'$ la topologie associée à D_∞.

Soit $O \in \mathcal{O}$, alors $O = \cup_i \Omega_i$ où chaque Ω_i est un ouvert élémentaire de E. Pour avoir $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, il suffit donc de montrer que les ouverts élémentaires de $\mathcal{O}$ sont dans $\mathcal{O}'$. Or si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega = O_1 \times \cdots \times O_n$, où O_i est un ouvert de E_i pour la distance d_i, il existe $r_i > 0$ tel que $B_{d_i}(x_i, r_i) \subset O_i$. Soit $r = \min_i(r_i) > 0$, alors

$$B_{D_\infty}(x, r) = \Pi_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, r) \subset \Pi_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, r_i) \subset \Pi_{i=1}^n O_i = \Omega$$

Donc $O \in \mathcal{O}'$.

Réciproquement, si $O \in \mathcal{O}'$, alors O est une réunion de boules ouverts $B_{D_\infty}(x, r)$, qui, d'après ce qui précède, sont des produits $\Pi_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, r)$ et donc des ouverts élémentaires de $\mathcal{O}$. D'où $O \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. $\square$

2.3 Continuité, uniforme continuité

2.3.1 Continuité en un point

Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques, $\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{O}_F$ les topologies associées, $f : E \to F$ et $a \in E$.

Rappelons que f est continue en a si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}\big(f(a)\big)$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Comme $\big(B_d(a,\rho)\big)_{\rho>0}$ et $\big(B_{d'}(f(a),\rho)\big)_{\rho>0}$ sont des SFV de a et $f(a)$, on peut réécrire la définition de la continuité en a de la manière suivante.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f\big(B_d(a,\epsilon)\big) \subset B_{d'}\big(f(a),\eta\big)$, ou ce qui revient au même, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, si $d(x,a) < \eta$ alors $d'\big(f(x),f(a)\big) < \epsilon$.

Remarque 2.5 *Comme $\big(B'(x,\rho)\big)_{\rho>0}$ est aussi un SFV de x, on peut réécrire la définition de la continuité en changeant une ou deux des inégalités strictes par une inégalité large.*

2.3.2 Continuité global, continuité uniforme

Une application $f : E \to F$ est continue sur E si et seulement si f est continue en tout point de $x \in E$ et donc, dans le cas où E et F sont des espaces métriques, on a la caractérisation suivante.

Proposition 2.13 *Si (E,d) et (F,d') sont des espaces métriques, alors $f : E \to F$ est continue sur E si et seulement si pour tout $x \in E$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in E$, si $d(x,y) < \eta$ alors $d'\big(f(x),f(y)\big) < \epsilon$.*

Remarque 2.6 *Dans cette définition, le module de continuité η dépend de ϵ et du point x. A ne pas confondre avec la continuité uniforme, dont la définition est la suivante.*

Définition 2.12 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $(x,y) \in E \times E$, si $d(x,y) < \eta$, alors $d'\big(f(x),f(y)\big) < \epsilon$.*

Dans cette définition, le module de continuité η ne dépend pas de x mais seulement de ϵ.

Proposition 2.14 *Une fonction uniformément continue est continue. La réciproque est fausse.*

Exemple 2.12 *$f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue.*

Remarque 2.7 *Par contraposée, on obtient que f n'est pas uniformément continue sur E si et seulement si il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telles que $d(x_n, y_n) \to 0$ et $d'\big(f(x_n), f(y_n)\big)$ ne tend pas vers 0.*

2.3.3 Applications Lipschitziennes

Définition 2.13 *Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que f est K-Lipschitzienne si et seulement si il existe $K > 0$ tel que $d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant K d(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$.*

En particulier, une isométrie est 1-Lipschitzienne.

Proposition 2.15 *Toute application Lipschitzienne est uniformément continue.*

Proposition 2.16 *Soit d_1 et d_2 deux métriques topologiquement équivalentes sur E, d'_1 et d'_2 deux métriques topologiquement équivalentes sur F. Alors $f : (E, d_1) \to (F, d'_1)$ est continue si et seulement si $f : (E, d_2) \to (F, d'_2)$ est continue. En revanche, l'uniforme continuité n'est pas conservée.*

Preuve. Cela découle directement de la définition des métriques topologiquement équivalentes et de la caractérisation de la continuité par images réciproques des ouverts. □

Proposition 2.17 *Soit d_1 et d_2 deux métriques équivalentes sur E, d'_1 et d'_2 deux métriques équivalentes sur F. Alors $f : (E, d_1) \to (F, d'_1)$ est uniformément continue (respectivement Lipschitzienne) si et seulement si $f : (E, d_2) \to (F, d'_2)$ est uniformément continue (respectivement Lipschitzienne).*

Preuve. Exercice. □

Exemples 2.13 *1) Soit (E, d) un espace métrique. On muni $\mathbb{R}$ de la distance usuelle et $E \times E$ d'une des distances produit D_1, D_2 ou D_∞. Alors l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne et donc uniformément continue $\Big(\big|d(x, y) - d(x', y')\big| \leqslant \big|d(x, y) - d(y, x')\big| + \big|d(x', y) - d(y', x')\big| \leqslant d(x, x') + d(y, y') = D_1\big((x, y), (x', y')\big)\Big)$.*

2) Soit A une partie de E. Alors l'application $d_A : E \to \mathbb{R}$ définie par $d_A(x) = d(x, A)$ est 1-Lipschitzienne:

pour tout $z \in A$, on $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. On en déduit d'abord que $\inf_{z' \in A} d(x, z') \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, puis que $\inf_{z' \in A} d(x, z') \leqslant d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z)$. D'où $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. De même, on montre que $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$.

2.4 Caractérisations séquentielles

Soit (E, d) un espace métrique. Comme pour tout $x \in E$, la famille $\big(B(x, \epsilon)\big)_{\epsilon > 0}$ est un SFV de x dans E, on en déduit la réécriture suivante de la définition de la limite d'une suite dans un espace métrique

Proposition 2.18 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(l, x_n) \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$.*

Comme un espace métrique est séparé, la limite d'une suite est unique quand elle existe.

2.4.1 Points adhérents, parties fermées

Théorème 2.19 *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $x \in E$. $x \in \overline{A}$ si et seulement si x est limite d'une suite de point de A.*

Preuve. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A qui tend vers x. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $a_n \in V$. Comme $a_n \in A$, on a $a_n \in A \cap V \neq \varnothing$ et donc $x \in \overline{A}$.

Réciproquement, soit $x \in \overline{A}$. $B(x, \frac{1}{n})$ étant un voisinage de x, il intercepte A. Soit $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de A vérifiant $d(x, a_n) \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui tend vers x. □

Remarque 2.8 *D'après la preuve précédente, si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique et si x est la limite d'une suite de points de A alors $x \in \overline{A}$. Mais la réciproque n'est pas vraie dans tous les espaces topologiques.*

Théorème 2.20 *Soit (E,d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $x \in E$.*

x est un point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$ et $a_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$ et $a_n \neq a_m$ pour tout $n \neq m$.

PREUVE. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui tend vers x et telle que $a_n \neq x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $a_n \in V$. Or, $a_n \neq x$ et donc $a_n \in A \cap (V\backslash\{x\}) \neq \emptyset$. On en déduit que x est un point d'accumulation de A.

Si (a_n) est une suite de points deux à deux distincts de A qui tend vers x alors il existe au plus un indice $q \in \mathbb{N}$ tel que $a_q = x$. Donc $(a_n)_{n>q}$ est une suite de points de A distincts de x qui tend vers x.

Si x est un point d'accumulation de A, alors $\big(B(x,1)\backslash\{x\}\big) \cap A$ est non vide donc contient un point a_1. De même, $\big[B\big(x, \min(\frac{1}{2}, d(x,a_1))\big)\backslash\{x\}\big] \cap A \neq \emptyset$ donc contient un point a_2 qui est forcément distinct de a_1. On construit en itérant une suite (a_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \in \big[B\big(x, \min(\frac{1}{n+1}, d(x,a_n))\big)\backslash\{x\}\big] \cap A$. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A 2 à 2 distincts qui tend vers x car $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$. □

Théorème 2.21 (Caractérisation séquentielle des fermés) *Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E. A est fermée si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, si (a_n) tend vers $x \in E$ alors $x \in A$.*

PREUVE. Si A est fermé alors $\overline{A} \subset A$. Or, si (a_n) est une suite de points de A qui converge vers un point $x \in E$, alors $x \in \overline{A}$ et donc $x \in A$.

Réciproquement, si $x \in \overline{A}$, alors x est limite d'une suite (a_n) de points de A et donc, par hypothèse on a $x = \lim a_n \in A$. D'où $\overline{A} \subset A$, i.e. $A = \overline{A}$ et A est fermé. □

Corollaire 2.22 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d) et $x \in E$.*

Alors $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

PREUVE. Si $x \in \overline{A}$, alors il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to x$. Comme $d(a_n,x) \to 0$, on a $d(x,A) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} d(a_n,x) = 0$ et donc $d(x,A) = 0$.

Si $d(x, A) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $0 \leqslant d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui tend vers x. D'où $x \in \overline{A}$. □

2.4.2 Limites de fonctions

Rappelons que si (E, d) et (F, d') sont deux espaces métriques, X est une partie non vide de E, $f : X \to F$ est une application et $a \in \overline{X}$, alors f admet une limite l quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$.

Théorème 2.23 *Soit $f : E \to F$, $X \subset E$, $a \in \overline{X}$ et $l \in F$. On a $\lim\limits_{x\to a,\, x\in X} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de X qui tend vers a, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

Preuve. Supposons que $\lim\limits_{x\to A,\, x\in X} f(x) = l$ et soit (x_n) une suite de points de X qui tend vers a. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$, et comme $x_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $x_n \in X$, on a $x_n \in U \cap X$ et donc $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geqslant N$. D'où $f(x_n) \to l$.

Réciproquement, s'il existe $V_0 \in \mathcal{V}(l)$ tel que pour tout $U \in \mathcal{V}(a)$, $f(U \cap X)$ n'est pas inclus dans V_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U = B(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(a)$, et comme $f\big(B(a, \frac{1}{n}) \cap X\big)$ n'est pas inclus dans V_0, il existe $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap X$ tel que $f(x_n) \notin V_0$. Alors $x_n \to a$ (car $d(x_n, a) \leqslant \frac{1}{n}$ et $f(x_n)$ ne tend pas vers l (car ne rentre jamais dans le voisinage V_0). □

Théorème 2.24 *Soit $f : E \to F$, $X \subset E$ et $a \in \overline{X}$. f a une limite quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui tend vers a, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans F.*

Preuve. Le sens direct découle du théorème précédent.

Réciproquement, si (x_n) et (x'_n) sont des suites de X qui tendent vers a, on note $l = \lim f(x_n)$ et $l' = \lim f(x'_n)$. On pose $y_{2n} = x_n$ et $y_{2n+1} = x'_n$. Alors $y_n \to a$ et donc $f(y_n)$ converge. Or $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ sont deux suites extraites de $f(y_n)$ d'où $l = l'$. On en déduit qu'il existe l telle que pour toute suite (x_n) de points de X qui tend vers a, on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. On conclut grâce au théorème précédent. □

On en déduit la caractérisation suivante de la continuité.

Théorème 2.25 *Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ et $a \in E$. f est continue en a si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, telle que $x_n \to a$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans F.*

La limite est alors nécessairement $f(a)$.

En combinant les deux derniers résultats, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.26 *Soit $f : E \to F$, $X \subset E$ et $a \in \overline{X}$. Si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui tend vers a, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l dans F, alors la fonction $\bar{f} : X \cup \{a\} \to F$, définie par $\bar{f} = f$ sur X et $\bar{f}(a) = l$, est continue en a.*

On dit que $\bar{f}$ est la prolongement de f par continuité en a.

2.4.3 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 2.14 *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E et $a \in E$. a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant n$ tel que $x_p \in V$.*

Remarque 2.9 *Si a est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors tout voisinage V de a contient tous les x_n (sauf un nombre fini).*

Si a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors tout voisinage V de a contient une infinité de x_n.

Définition 2.15 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite de cette suite toute suite de la forme $\big(x_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

Théorème 2.27 *Soit (E,d) un espace métrique. a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a.*

PREUVE. Supposons qu'il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a. Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $x_{\phi(k)} \in V$. Comme ϕ est strictement croissante, on a $\phi(k) \geqslant k$ pour tout k (récurrence), donc si $k \geqslant \max(N,n)$, on a $\phi(k) \geqslant n$ et $x_{\phi(k)} \in V$ donc a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement, si a est une valeur d'adhérence de (x_n), alors il existe $p_1 \geqslant 0$ tel que $x_{p_1} \in B(a,1)$. On pose $\phi(1) = p_1$. Il existe $p_2 \geqslant \phi(1)+1$ tel que $x_{p_2} \in B(a,\frac{1}{2})$. On pose $\phi(2) = p_2$. On a bien $\phi(1) > \phi(2)$. On suppose construits $\phi(0) < \ldots < \phi(n)$ tels que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_{\phi(k)} \in B(a, \frac{1}{k})$. On pose $V = B(a, \frac{1}{n+1})$, alors il existe $p_{n+1} \geqslant \phi(n) + 1$ tel que $p_{n+1} \in V$. On pose $\phi(n+1) = p_{n+1}$, et on a $x_{\phi(n+1)} \in B(a, \frac{1}{n+1})$ et $\phi(n+1) > \phi(n) > \ldots > \phi(1)$. On en déduit, par récurrence, qu'il existe une suite $(\phi(n))$ strictement croissante telle que $x_{\phi(n)} \to a$. $\square$

Remarque 2.10 *Pour certains problèmes, il est plus commode d'utiliser la définition d'une valeur d'adhérence plutôt que la caractérisation avec les suites extraites.*

Remarque 2.11 *D'aprés la preuve qui précède, si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique et qu'une suite extraite de la suite (x_n) tend vers a, alors a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est fausse en général dans un espace topologique.*

Remarque 2.12 *1) Une suite peut avoir plusieurs valeurs d'adhérence ou aucune (par exemple $\big((-1)^n\big)_{n\in N}$ a deux valeurs d'adhérence dans $\mathbb{R}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$).*

2) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour seule valeur d'adhérence la limite. La réciproque est fausse en général ($(x_{2n}) = 1$ et $x_{2n+1} = n$ n'a qu'une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ mais ne converge pas).

3) L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite dépend de l'ensemble dans lequel la suite est considérée (par exemple la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 comme valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ mais n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}_+^*$).

4) Soit $E_1 \times E_2$ un produit d'espaces métriques, $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E_1 \times E_2$ et $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$. Si (a_1, a_2) est une valeur d'adhérence de $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors a_1 est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et a_2 est une valeur d'adhérence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est fausse car $(-1, 1)$ n'est pas valeur d'adhérence de la suite $\big((-1)^n, (-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 2.28 *Soit (E, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E et l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors A est un fermé de E et plus précisément, si on pose $S_n = \{x_p,\, p \geqslant n\}$, alors $A = \cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{S_n}$ (noter qu'on peut avoir $A = \varnothing$).*

PREUVE. a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in N}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant n$ tel que $x_p \in V$. Donc a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in N}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n \cap V \neq \emptyset$. On en déduit que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in N}$ si et seulement si $a \in \overline{S_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

2.4.4 Cas des suites réelles

Théorème 2.29 *Soit (x_n) une suite de réels. L'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est un fermé non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. A admet dans $\overline{\mathbb{R}}$ un plus grand et un plus petit élément. On les appelle respectivement la limite supérieure de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la limite inférieure de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notées $\limsup x_n$ et $\liminf x_n$.*

PREUVE. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, alors le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire une suite convergeant dans $\mathbb{R}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée alors on peut extraire une suite tendant vers $+\infty$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non minorée alors on peut extraire une suite qui tend vers $-\infty$. Donc $A \neq \emptyset$. On en déduit que A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Comme $\overline{A} = A$, on a $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$. □

Remarque 2.13 *L'intérêt pratique des limites supérieure et inférieure est qu'elles existent toujours pour toutes les suites réelles (contrairement aux limites).*

Lemme 2.30 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose $S_n = \{x_p,\, p \geqslant n\}$, $y_n = \sup S_n$ et $z_n = \inf S_n$. Alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qui tend vers $\limsup x_n$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qui tend vers $\liminf x_n$.*

PREUVE. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} \subset S_n$ donc $y_{n+1} \leqslant y_n$ et $z_{n+1} \geqslant z_n$. Donc les suites (y_n) et (z_n) sont monotones, et donc convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $p \geqslant n$, on a $S_p \subset S_n$ et donc $\overline{S_p} \subset \overline{S_n}$. Comme $y_p = \sup S_p \in \overline{S_p}$, on a $y_p \in \overline{S_n}$, $\forall p \geqslant n$. Comme $\overline{S_n}$ est fermé, on a $\lim y_p \in \overline{S_n}$ pour tout n, et donc $\lim y_p \in \cap_n \overline{S_n} = A$. D'où $\lim y_n \leqslant \limsup x_n = \sup A$.

Comme $\limsup x_n$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{\phi(n)} \to \limsup x_n$. Comme $\phi(n) \geqslant n$, on $x_{\phi(n)} \in S_n$ pour tout n, donc $x_{\phi(n)} \leqslant y_n$ pour tout n. En passant à la limite, on obtient $\limsup x_n \leqslant \lim y_n$.

La preuve de $\lim z_n = \liminf x_n$ est similaire. □

Théorème 2.31 *Soit (x_n) une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si on a* $\liminf x_n = \limsup x_n$.

Preuve. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle n'a qu'une valeur d'adhérence, d'où l'égalité.

Réciproquement, si $\limsup x_n = \liminf x_n = l$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_1$, $l - \epsilon \leqslant y_n \leqslant l + \epsilon$ et pour tout $n \geqslant n_2$, $l - \epsilon \leqslant z_n \leqslant l + \epsilon$ (où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites introduites plus haut). Donc pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a $l - \epsilon \leqslant z_n \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant l + \epsilon$. On en déduit que $x_n \to l$. □

Proposition 2.32 *On a les règles de calcul suivantes.*

1) $\limsup -x_n = -\liminf x_n$ *et* $\liminf -x_n = -\limsup x_n$.

2) Si $x_n \leqslant x'_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\liminf x_n \leqslant \liminf x'_n$ *et* $\limsup x_n \leqslant \limsup x'_n$.

3) $\limsup(x_n + x'_n) \leqslant \limsup x_n + \limsup x'_n$ *et* $\liminf(x_n + x'_n) \geqslant \liminf x_n + \liminf x'_n$ *(on a pas nécessairement l'égalité).*

4) Si (x_n) a une limite $x > 0$, on a $\limsup x_n x'_n = x \limsup x'_n$ *et* $\liminf x_n x'_n = x \liminf x'_n$. *En revanche on n'a pas* $\limsup(x_n x'_n) = \limsup x_n \limsup x'_n$ *ni* $\liminf x_n x'_n = \liminf x_n \liminf x'_n$ *en général (même si $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$).*

Preuve.

2) Si $x_n \leqslant x'_n$ pour tout $n \geqslant p$, alors $x_n \leqslant y'_p$ pour tout $n \geqslant p$ et donc $y_p \leqslant y'_p$ pour tout p. En passant à la limite, on a $\lim y_p \leqslant \lim y'_p$.

3) $x''_n = x_n + x'_n \leqslant y_p + y'_p$ pour tout $n \geqslant p$, d'où $y''_p \leqslant y_p + y'_p$ et $\limsup(x_n + x'_n) \leqslant \limsup x_n + \limsup x'_n$.

4) Soit $(x_{\phi(n)} x'_{\phi(n)})$ une suite extraite qui tend vers $\limsup(x_n x'_n)$ alors $x_{\phi(n)} \to x$ et $x'_{\phi(n)} = \frac{x_{\phi(n)} x'_{\phi(n)}}{x_{\phi(n)}} \to \frac{\limsup(x_n x'_n)}{x}$. Comme $\limsup x'_n$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de (x'_n) on a $\frac{\limsup(x_n x'_n)}{x} \leqslant \limsup x'_n$.

Réciproquement, soit $x'_{\Psi(n)} \to \limsup x'_n$, alors $x_{\Psi(n)} x'_{\Psi(n)} \to x \limsup x'_n \leqslant \limsup x_n x'_n$, car alors $x \limsup x'_n$ est une valeur d'adhérence de $(x_n x'_n)$.

□

Nous finissons une application, illustrant la simplification apportée à l'étude des limites de suites par les notions de lim sup et lim inf.

Proposition 2.33 *On dit qu'une suite de réels positifs* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sous-multiplicative si et seulement si pour tout* $(p,q)\in\mathbb{N}^2$*, on a* $x_{p+q}\leqslant x_p\times x_q$*.*

L'exemple type est la suite $x_n=\|M^n\|$ *où* M *est une matrice carrée (réelle ou complexe) et* $\|\cdot\|$ *est une norme d'algèbre (ou d'opérateur) sur les matrices.*

Pour toute suite sous-multiplicative, on a $\lim(x_n)^{\frac{1}{n}}=\inf\{x_n^{\frac{1}{n}},\in\mathbb{N}\}$*.*

Preuve. On pose $y_n=(x_n)^{\frac{1}{n}}$. Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé et $n\in\mathbb{N}$ quelconque. Il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n=pq+r$ et $r<p$. On a alors

$$y_n=(x_{pq+r})^{\frac{1}{pq+r}}\leqslant(x_{pq}x_r)^{\frac{1}{pq+r}}\leqslant x_p^{\frac{q}{pq+r}}x_r^{\frac{1}{pq+r}}=x_p^{\frac{n-r}{pn}}x_r^{\frac{1}{n}}$$

or $r<p$ donc $\frac{n-r}{pn}\to\frac{1}{p}$ et $x_p^{\frac{n-r}{pn}}x_r^{\frac{1}{n}}\to x_p^{\frac{1}{p}}$.

On en déduit que $\limsup y_n\leqslant y_p$ pour tout p et donc $\limsup y_n\leqslant\inf\{y_p/p\in\mathbb{N}\}$. Comme par ailleurs, on a $y_n\geqslant\inf\{y_p/p\in\mathbb{N}\}$, on en déduit que $\liminf y_n\geqslant\inf\{y_p/p\in\mathbb{N}\}$.

Comme par ailleurs, on a toujours $\liminf y_n\leqslant\limsup y_n$ on en déduit que $\liminf y_n=\limsup y_n=\inf\{y_p/p\in\mathbb{N}\}$. Donc la suite (y_n) converge vers $\inf\{y_p/p\in\mathbb{N}\}$. □

Sommaire

Chapitre 3

Espaces connexes

Remarque préliminaire: Considérons l'espace $E =]0,1[\cup]2,3[$ muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$. Alors $O_1 =]0,1[$ est à la fois ouvert et fermé dans E, puisque $O_1 = E \cap]0,1[= E \cap [0,1]$. Il en est de même de $O_2 =]2,3[$.

3.1 Généralités

Définition 3.1 *Soit E un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) E et $\varnothing$ sont les seules parties ouvertes et fermées de E.

ii) Il n'existe pas de couple (O_1, O_2) d'ouverts non vides de E qui sont disjoints et de réunion égale à E.

iii) Il n'existe pas de couple (F_1, F_2) de fermés non vides de E qui sont disjoints et de réunion égale à E.

On dit que E est un espace connexe si et seulement si E vérifie l'une des ces propriétés.

Exemple 3.1 *Soit $E = \{x, y\}$ muni de la distance discrète définie par $d(x, y) = 1$ (i.e. de la topologie discrète). Alors E n'est un espace connexe puisqu'on peut* *l'écrire comme réunion disjointe de deux parties non vides (et que toutes les parties de E sont ouvertes et fermées).*

Exemple 3.2 *$\mathbb{Z}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ n'est pas connexe ($\{0\}$ et $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sont ouverts dans $\mathbb{Z}$).*

Définition 3.2 *Soit E un espace topologique et X une partie de E. On dit que X est une partie connexe de E (ou plus simplement un connexe de E) si et seulement si X muni de la topologie induite par celle de E est connexe.*

Proposition 3.1 *La propriété pour une partie d'être connexe est intrinsèque: si $E' \subset E$ est muni de la topologie induite par celle de E alors les parties connexes de E' sont les parties connexes de E contenues dans E'.*

Preuve. On note $\mathcal{O}_E$ la topologie de E et $\mathcal{O}_{E'}$ la topologie induite sur E' par $\mathcal{O}_E$. Par transitivité de la topologie induite, si $X \subset E' \subset E$, alors les ouverts (respectivement les fermés) de X pour la topologie induite par $\mathcal{O}_E$ sont les mêmes que les ouverts (respectivement les fermés) de X pour la topologie induit par $\mathcal{O}_{E'}$. On en déduit facilement la proposition en appliquant la caractérisation i) de la connexité. $\square$

Théorème 3.2 *Soit E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est une partie connexe de F.*

Preuve. Soit O une partie ouverte et fermée de $f(E)$ pour la topologie induite. Comme f est continue comme application à valeurs dans $f(E)$ muni de la topologie induite, on en déduit que $f^{-1}(O)$ est un ouvert et un fermé de E. Comme E est connexe, on en déduit que $f^{-1}(O)$ est soit vide soit égal à E. Comme $O = f(f^{-1}(O))$, on obtient que O est soit vide soit égal à $f(E)$ entier. Donc $f(E)$ est connexe. $\square$

La proposition suivante est très pratique pour l'étude des espaces connexes.

Proposition 3.3 *Soit E un espace topologique. E est un espace connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante. (ici on munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète).*

Preuve. Si E est connexe et $f : E \to \{0, 1\}$ continue, alors $f(E)$ est une partie connexe et non vide de $\{0, 1\}$. Or $\{0, 1\}$ n'est pas connexe (car $\{0\}$ est ouvert et fermé dans $\{0,1\}$), donc $f(E)$ est égal à $\{0\}$ ou $\{1\}$. On en déduit que f est constante.

Réciproquement, si E n'est pas connexe, alors $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 ouverts disjoints non vides de E. On définit $f : E \to \{0,1\}$ en posant $f(x) = 0$ si $x \in O_1$ et $f(x) = 1$ si $x \in O_2$. f est bien définie sur E car O_1 et O_2 sont disjoints et de réunion égale à E. Comme $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = O_1$, $f^{-1}(\{1\}) = O_2$ et $f^{-1}(\{0,1\}) = E$, on en déduit que l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ est un ouvert de E. Donc f est continue et non constante sur E. $\square$

La proposition précédente se généralise facilement.

Proposition 3.4 *Soit E un espace topologique et D un espace topologique discret (i.e. muni de la topologie discrète. E est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to D$ est constante.*

Proposition 3.5 *Soit E un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties connexes de E. Si $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Preuve. Fixons un point $a \in \cap_{i\in I} A_i$ (c'est possible car cette intersection est supposée non vide). Si $f : \cup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ est une application continue, alors $f_{|A_i}$ est continue, et donc constante par connexité de A_i. Comme $a \in A_i$ pour tout $i \in I$, on a $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in A_i$. On en déduit que f est constante égale à $f(a)$ sur $\cup_{i\in I} A_i$. $\square$

Remarque 3.1 *Attention, la réunion de deux connexes d'intersection vide n'est pas connexe en général (voir l'exemple donné en remarque préliminaire). De même, l'intersection de 2 connexes n'est pas une partie connexe en général.*

Proposition 3.6 *Soit E un espace topologique et A une partie connexe de E. Si B est une partie de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est connexe.*

En particulier, l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Preuve. Soit $f : B \to \{0,1\}$ une application continue. Comme A est connexe et que f est continue sur A, on obtient que f est constante sur A. Comme f est continue sur B, l'ensemble $\{x \in B,\ f(x) \in f(A)\}$ est un fermé de B contenant A. Donc f est constante sur l'adhérence de A dans B qui est $B \cap \overline{A} = B$. On en déduit que f est constante sur B. $\square$

Remarque 3.2 *L'intérieur d'une partie connexe n'est pas nécessairement connexe. En effet, la réunion de deux disques fermés et tangents extérieurement de $\mathbb{R}^2$ est connexe (comme réunion de connexes d'intersection non vide), mais son intérieur est la réunion des disques ouverts correspondant (qui sont non vides et disjoints) et donc n'est pas connexe.*

3.2 Parties connexes de $\mathbb{R}$

Définition 3.3 *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout couple (x, y) d'éléments de I, si $x < y$ alors $[x, y] \subset I$ (i.e. les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes de $\mathbb{R}$).*

Théorème 3.7 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

PREUVE. Si I n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ alors il existe $(x, y) \in I \times I$ tel que $x < y$ et $[x, y] \not\subset I$. Autrement dit il existe un réel z tel que $x < z < y$ et $z \notin I$. Alors $O_1 = I \cap]-\infty, z[$ est un ouvert de I non vide (car il contient x). De même $O_2 = I \cap]z, +\infty[$ est un ouvert non vide de I, et on a $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ et $O_1 \cup O_2 = I \cap (]-\infty, z[\cup]z, +\infty[= I \cap (\mathbb{R} \backslash \{z\}) = I$. Donc I n'est pas connexe.

Réciproquement, si $I = [a, b]$ n'est pas connexe, alors I est la réunion de deux fermés disjoints non vides F_1 et F_2. Si $a \in F_1$ alors $c = \inf F_2 \in F_2$ (car F_2 est fermé) et $a < c$ car F_1 et F_2 sont disjoints. On a donc $[a, c[\subset F_1$ (car $[a, b] = F_1 \cup F_2$) et donc $c = \lim_{n\to\infty} c + \dfrac{a-c}{n} \in F_1$ car F_1 est fermé. Donc $c \in F_1 \cap F_2$, ce qui est impossible.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si I est vide, alors I est évidement connexe. Si I est non vide, alors I peut toujours être écrit comme réunion d'une suite de segments ayant tous un point commun (par exemple $]a, +\infty[= \cup_{n\in\mathbb{N}}[a + \frac{1}{n+1}, a + 2 + n]$). Donc I est connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide. $\square$

On en déduit directement le résultat suivant.

Théorème 3.8 (des valeurs intermédiaires) *Soit E un espace topologique connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

En particulier, si f prend les valeurs α et β sur E, alors f prend toutes les valeurs comprise entre α et β sur E.

Si f prend deux valeurs de signes opposés sur E, alors f s'annule sur E.

Remarque 3.3 *Si E est connexe et compact, et si f est continue sur E alors $f(E)$ est un segment de $\mathbb{R}$.*

Le résultat précédent se généralise.

Proposition 3.9 *Soit E un espace topologique connexe, F un espace topologique, A une partie de F et $h : E \to F$ une application continue. Si $h(E) \cap \operatorname{Int} A \neq \varnothing$ et $h(E) \cap \operatorname{Ext} A \neq \varnothing$, alors $h(E) \cap \operatorname{Fr} A \neq \varnothing$.*

En particulier (si $E = [a, b]$), tout chemin continue dans F qui relie un point de $\operatorname{Int} A$ à un point de $\operatorname{Ext} A$ coupe $\operatorname{Fr} A$.

PREUVE. Int$A$ et Ext$A$ sont des ouverts de F et F est la réunion disjointe de $\operatorname{Fr} A$, Int$A$ et $\operatorname{Ext} A$. On a donc

$$E = h^{-1}(\operatorname{Int} A) \cup h^{-1}\big(\operatorname{Ext} A\big) \cup h^{-1}(\operatorname{Fr} A)$$

Or cette réunion est disjointe et $h^{-1}(\operatorname{Int} A)$ et $h^{-1}(\operatorname{Ext} A)$ sont des ouverts E par continuité de h, non vides par hypothèse. Donc $h^{-1}(\operatorname{Fr} A)$ ne peut être vide sans contredire la connexité de E. $\square$

3.3 Composantes connexes

Proposition 3.10 *Soit E un espace topologique et x un point de E. Il existe une plus grande partie connexe de E contenant x. On l'appelle composante connexe de x dans E, et on la note $C(x)$. On dit aussi que $C(x)$ est une composante connexe de E.*

PREUVE. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties connexes de E contenant x ($\mathcal{C}$ est non vide car il contient au moins $\{x\}$). Alors $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ contient x et est une partie connexe de E (comme réunion de connexes d'intersection non vide). Enfin, toute partie connexe de E qui contient x est contenue dans $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. $\square$

Exemple 3.3 *Soit $E = \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, alors $C(x)$ est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{R}^*$ et contenant x (d'après le caractère intrinsèque de la connexité). On en déduit que si $x > 0$, alors $C(x) =]0, +\infty[$ et si $x < 0$, $C(x) =] - \infty, 0[$.*

Exemple 3.4 *Soit $E = \mathbb{Q}$. Les connexes de $\mathbb{Q}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$ contenus dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (et donc intercepte tout intervalle réel d'intérieur non vide), on en déduit que $C(x) = \{x\}$.*

Proposition 3.11 *Soit E un espace topologique.*

1) *Pour tout $x \in E$, $C(x)$ est un fermé de E.*

2) *Les composantes connexes distinctes de E forment une partition de E.*

PREUVE.

1) Comme $C(x)$ est connexe, $\overline{C(x)}$ est un connexe de E qui contient x. Comme $C(x)$ est le plus grand connexe qui contient x, on a $\overline{C(x)} \subset C(x)$, donc $C(x)$ est fermé.

2) $C(x)$ contient x donc $\bigcup_{x\in E} C(x) = E$. Il reste à montrer que si $C(x)$ et $C(y)$ sont deux composantes connexes alors soit $C(x) = C(y)$ soit $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. Supposons $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, alors $C(x) \cup C(y)$ est un connexe de E qui contient x. On en déduit que $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$, et donc $C(y) \subset C(x)$. De même, $C(x) \subset C(y)$.

$\square$

Remarque 3.4 *Si E est l'ensemble considéré dans la remarque préliminaire, $]0, 1[$ est la composante connexe de $1/2$ dans E. $]0, 1[$ est bien un fermé de E (mais pas de $\mathbb{R}$).*

Proposition 3.12 *Soit E et F des espaces topologiques et $h : E \to F$ une application continue.*

Si A est une partie connexe de E alors $h(A)$ est entièrement contenue dans une composante connexe de F. En particulier, les composantes connexes de E ont leur images contenues dans des composantes connexes de F.

Si h est un homéomorphisme et $(C_i^E)_{i\in I}$, $(C_j^F)_{j\in J}$ sont les composantes connexes (distincts) de E et F, alors il existe une bijection $\varphi : I \to J$ telle que pour tout $i \in I$, h induise un homéomorphisme de C_i^E sur $C_{\varphi(j)}^F$.

En particulier des espaces topologiques homéomorphes ont des ensembles de composantes connexes de même cardinal.

Preuve. Puisque h est continue et A connexe, $h(A)$ est connexe. On en déduit que si $y \in h(A)$ alors $h(A) \subset C(y)^F$. D'où le premier résultat.

Si h est un homéomorphisme, alors pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $h(C_i^E) \subset C_j^F$. Comme les (C_j^F) sont disjoints, j est unique. On pose $\varphi(i) = j$. Si $\varphi(i) = \varphi(i')$, alors $\big(h(C_i^E) \cup h(C_{i'}^E)\big) \subset C_{\varphi(i)}^F$. Comme h^{-1} est continue, il existe $i'' \in I$ tel que $h^{-1}\big(C_{\varphi(i)}^F\big) \subset C_{i''}^E$. On a alors

$$C_i^E \cup C_{i'}^E = h^{-1}\big(h(C_i^E) \cup h(C_{i'}^E)\big) \subset h^{-1}\big(C_{\varphi(i)}^F\big) \subset C_{i''}^E$$

comme les composantes connexes de E sont disjointes, on obtient $C_i^E = C_{i'}^E = C_{i''}^E = h^{-1}\big(C_{\varphi(i)}^F\big)$. On en déduit que $i = i'$ (donc $\varphi : I \to J$ est injective) et h induit un homéomorphisme de C_i^E sur $C_{\varphi(i)}^F$.

Enfin, si $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $h^{-1}(C_j^F) \subset C_i^E$. On en déduit que

$$C_j^F = h \circ h^{-1}(C_j^F) \subset h(C_i^E) \subset C_{\varphi(i)}^F$$

et comme les composantes connexes de F sont disjointes, on a $C_j^F = C_{\varphi(i)}^F$ et $j = \varphi(i)$. $\varphi : I \to J$ est donc une bijection et h un homéomorphisme de C_i^E sur $C_{\varphi(i)}^F$. $\square$

Exemple 3.5 *La lettre X n'est pas homéomorphe à la lettre Y. En effet, si un homéomorphisme h de X sur Y existait, alors pour tout $M \in X$, h se restreindrait en un homéomorphisme de $X \backslash \{M\}$ sur $Y \backslash \{h(M)\}$. Or, si M est le point de croisement des branches de X, alors $X \backslash \{M\}$ a 4 composantes connexes, alors que pour tout point N de Y, $Y \backslash \{N\}$ a au plus 3 composantes connexes. Ce qui n'est pas possible d'après la proposition précédente.*

Exercice 3.1 *Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.*

Définition 3.4 *Soit E un espace topologique. On dit que E est localement connexe si et seulement si pour tout $x \in E$ admet un SFV constitué de voisinages connexes.*

Exemple 3.6 *$\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est localement connexe (car $]x-\epsilon, x+\epsilon[)_{\epsilon>0}$ est un SFV de tout $x \in \mathbb{R}$) mais pas $\mathbb{Q}$ (car aucun voisinage de $\mathbb{Q}$ n'est connexe).*

Proposition 3.13 *Si E est un espace topologique localement connexe et O est un ouvert de E, alors les composantes connexes de O sont des ouverts de E.*

Preuve. Soit $x \in O$ et $C(x)$ sa composante connexe dans O pour la topologie induite par celle de E. Soit $y \in C(x)$. Comme O est un ouvert de E, O est un voisinage de y dans E. Par hypothèse, il existe un voisinage connexe V de y dans E tel que $V \subset O$. Alors V et $C(x)$ sont des connexes de E (car les connexes de O sont des connexes de E) d'intersection non vide (elle contient y). On en déduit que $V \cup C(x)$ est un connexe de E contenu dans O (donc un connexe de O). Comme $C(x)$ est le plus grand connexe de O contenant x, on a $V \subset C(x)$ et donc $C(x)$ est un voisinage dans E de chacun de ses points. Donc $C(x)$ est un ouvert de E. □

Corollaire 3.14 *Tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est de la forme $O = \cup_{i\in I}]a_i, b_i[$, où les intervalles sont disjoints, $-\infty \leqslant a_i < b_i \leqslant +\infty$ et I est un ensemble dénombrable (i.e. I est fini ou $I = \mathbb{N}$).*

Preuve. Les composantes connexes de O sont des intervalles ouverts (ce sont des ouverts de $\mathbb{R}$ d'après la proposition précédente et les connexes de O sont les connexes de $\mathbb{R}$–donc des intervalles–contenus dans O). Comme O est la réunion disjointe de ses composantes connexes, il ne reste plus qu'à montrer que O a un nombre dénombrable de composantes. Or chacune de ces composantes est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc elle contient au moins un nombre rationnel (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Comme les composantes sont disjointes et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en déduit que O a un nombre dénombrable de composantes connexes. □

3.4 Connexité par arcs

Définition 3.5 *Soit E un espace topologique. On dit que E est connexe par arcs si et seulement si pour tout couple (a, b) de points de E, il existe un chemin continu reliant a et b dans E, i.e. il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

Proposition 3.15 *Tout espace connexe par arcs est connexe. La réciproque est fausse en général.*

Preuve. Soit E une partie connexe par arcs. On fixe $a \in E$. Alors pour tout $b \in E$, il existe $\gamma_b : [0, 1] \to E$ continue telle que $\gamma_b(0) = a$ et $\gamma_b(1) = b$. Donc $\big(\gamma_b([0, 1])\big)_{b\in E}$ est une famille de parties connexes dont l'intersection est non vide (car elle contient a) et $E = \cup_{b\in E}\gamma_b([0,1])$. On en déduit que E est connexe.

Soit $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$, comme $A = F(]0,+\infty[)$, où $F(x) = (x, \sin(1/x))$ est continue, on en déduit que A est connexe. On considère $E = \overline{A}$ où l'adhérence est prise dans $\mathbb{R}^2$. E est alors connexe, mais on va montrer que E n'est pas connexe par arcs. On a $E = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. On va montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = (1/\pi, 0)$ et $f(1) = (0,1)$. En effet, si f existe, soit $t_0 = \inf\{t > 0/\pi_1 \circ f(t) = 0\}$ (où $\pi_1(x,y) = x$ et $\pi_2(x,y) = y$). Comme $\pi_1 \circ f(0) > 0$, on a $t_0 > 0$ par continuité de $\pi_1 \circ f$ en 0. Par définition de t_0, il existe une suite $1 \geqslant t_n \geqslant t_0$ qui tend vers t_0 telle que $\pi_1 \circ f(t_n) = 0$. Par continuité de $\pi_1 \circ f$ on a $\pi_1 \circ f(t_0) = 0$ et par définition de t_0, $\pi_1 \circ f(t) > 0$ pour tout $t_0 > t \geqslant 0$ (i.e. $f(t) \in A$ pour tout $t \in [0, t_0[$). On note $y = \pi_2 \circ f(t_0)$. Comme $\pi_2 \circ f$ est continue, il existe $t_0 > \eta > 0$ tel que $\pi_2 \circ f(t) \in [y - 1/2, y + 1/2]$ pour tout $t \in]\eta, t_0]$. Comme l'intervalle $[-1,1]$ est de longueur 2, il existe $z \in [-1,1]\backslash[y - 1/2, y + 1/2]$ et $\theta \in]0, 2\pi]$ tel que $z = \sin(\theta)$. Comme pour k assez grand on a

$$\pi_1 \circ f(t_0) = 0 < \frac{1}{\theta + 2k\pi} < \pi_1 \circ f(\eta),$$

le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $t_1 \in]\eta, t_0[$ tel que $\pi_1 \circ f(t_1) = \frac{1}{\theta+2k\pi}$ et donc, par définition de A, on a $\pi_2 \circ f(t_1) = \sin\left(\frac{1}{\pi_1 \circ f(t_1)}\right) = z \notin [y - 1/2, y + 1/2]$ ce qui est en contradiction avec la façon dont η a été choisi. □

Corollaire 3.16 *Les parties convexes d'un espace vectoriel normé sont connexes (par arcs). En particulier, tout espace vectoriel normé est connexe et localement connexe (par arcs).*

PREUVE. Soit A est une partie convexe et x, y deux points de A. Alors la fonction $\gamma(t) = x + t(y - x)$ est continue (car $\|x - y\|$-Lipschitzienne) et relie x à y, donc A est connexe par arcs. En particulier, toutes les boules ouvertes d'un espace vectoriel normé étant convexes, on en déduit que tout espace vectoriel normé est localement connexe par arcs. □

Proposition 3.17 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Les ouverts connexes de X sont connexes par arcs. Autrement dit, les ouverts des espaces vectoriels normés sont connexes si et seulement si ils sont connexes par arcs.*

Preuve. Soit O un ouvert connexe de X et a un point de O. On note A_a l'ensemble des points $b \in O$ pour lesquels il existe un chemin continu reliant a et b dans O. On doit montrer que $A_a = O$.

A_a est non vide car il contient a (prendre un chemin constant).

Montrons que A_a est ouvert: soit $b \in A_a$ alors il existe $\gamma_b : [0,1] \to O$ continue tel que $\gamma_b(0) = a$ et $\gamma_b(1) = b$. Comme O est un ouvert de X, il existe $r > 0$ tel que $B(b,r) \subset O$. Alors, pour tout $y \in B(b,r)$, le chemin défini par $\gamma_y(t) = \gamma_b(2t)$ si $t \in [0,1/2]$ et $\gamma_y(t) = b + (2t-1)(y-b)$ si $t \in [1/2,1]$ est continu et relie a à y dans O (par convexité de $B(b,r)$). On en déduit que $B(b,r) \subset A_a$.

Montrons que A_a est fermé dans O: soit (b_n) une suite d'éléments de A_a qui converge vers un élément b de O. Comme O est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(b,r) \subset O$. Comme (b_n) converge vers b, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_N \in B(b,r)$. Or, il existe un chemin continu γ_N reliant a à b_N dans O, alors le chemin γ_b défini par $\gamma_b(t) = \gamma_N(2t)$ si $t \in [0,1/2]$ et $\gamma_b(t) = b_N + (2t-1)(b-b_N)$ si $t \in [1/2,1]$ est continu et relie a à b dans O (par convexité de $B(b,r)$). On en déduit que $b \in A_a$.

On a montré que A_a est une partie non vide, ouverte et fermée de O. Par connexité de O on en déduit que $A_a = O$. $\square$

Remarque 3.5 *Plus généralement, si E est un espace topologique localement connexe par arcs alors tout ouvert connexe de E est connexe par arcs.*

3.5 Applications

Vous trouverez des exercices basiques pour s'habituer à utiliser les convexes dans des livres de niveau L (par exemple les livres de Ramis-Deschamps-Odoux ou de Monnier contiennent beaucoup d'exercices). Dans cette section on utilise la connexité pour démontrer des résultats classiques d'analyse et d'algèbre.

On va démontrer une version assez générale de l'inégalité des accroissements finis:

Théorème 3.18 *Soit $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $f : [a,b] \to F$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f et g admettent des dérivées à droite partout sur $[a,b]\backslash D$, où D est un ensemble dénombrable, et vérifient $\|f'_d(t)\| \leqslant g'_d(t)$ pour tout $t \in [a,b]\backslash D$. Alors $\|f(a)-f(b)\| \leqslant g(a)-g(b)$.*

Remarque 3.6 *f admet une dérivée à droite en t_0 si et seulement si $\frac{1}{t_0-t}\big(f(t_0)-f(t)\big)$ admet une limite quand t tend vers t_0 par valeurs supérieures. On note alors $f'_d(t_0)$ la limite. Remarquez que l'existence d'une dérivée à droite en x n'implique la continuité en x (seulement la continuité à droite en x). Le même énoncé est valable en remplaçant dérivées à droite par dérivées à gauche.*

PREUVE. On note $D = \{a_0, a_1, \ldots\}$. Soit $\epsilon > 0$ fixé et

$$U = \Big\{t \in [a,b] / \|f(s) - f(a)\| \leqslant g(s) - g(a) + \epsilon(s-a) + \sum_{a_i < s} \frac{\epsilon}{2^i},\ \forall s \in [a,t]\Big\}$$

On a $a \in U$, donc U est non vide. Comme $[a,b]$ est un connexe, il ne reste plus qu'à démontrer que U est ouvert et fermé dans $[a,b]$. On en déduit alors que $U = [a,b]$, et donc $b \in U$, i.e.

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a) + \epsilon(b-a) + \sum_{a_i < b} \frac{\epsilon}{2^i} \leqslant g(b) - g(a) + \epsilon(2 + b - a)$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on obtient l'inégalité voulue en faisant tendre ϵ vers 0.

Montrons que U est un fermé de $[a,b]$: soit (t_n) une suite d'éléments de U qui converge vers un point t de $[a,b]$. Soit $s \in [a,t[$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $s \leqslant t_N$. Comme $t_N \in U$, on a

$$\|f(s) - f(a)\| \leqslant g(s) - g(a) + \epsilon(s-a) + \sum_{a_i < s} \frac{\epsilon}{2^i}$$

Pour avoir $t \in U$, il ne reste plus qu'à montrer que l'inégalité est valable pour $s = t$. Comme elle est valable pour tout $s < t$, elle est valable pour $t_n = t - 1/n$. Comme $s \mapsto \sum_{a_i < s} \frac{\epsilon}{2^i}$ est croissante, on a

$$\begin{aligned}\|f(t_n) - f(a)\| &\leqslant g(t_n) - g(a) + \epsilon(t_n - a) + \sum_{a_i < t_n} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &\leqslant g(t_n) - g(a) + \epsilon(t_n - a) + \sum_{a_i < t} \frac{\epsilon}{2^i}\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant les continuités de f et de g en t, on obtient l'inégalité voulue.

Montrons que U est un ouvert de $[a,b]$: Soit $t \in U$. On doit montrer qu'il existe $r>0$ tel que $B(t,r) \subset U$. Comme on a $[a,t] \subset U$, il ne reste plus qu'à montrer que $[t, t+r[\subset U$ pour $r>0$ assez petit, i.e qu'on a

$$\|f(s)-f(a)\| \leqslant g(s)-g(a)+\epsilon(s-a)+\sum_{a_i<s} \frac{\epsilon}{2^i}$$

pour tout $s \in]t, t+r[$. Si $t = a_{i_0}$ (i.e. $t \in D$) alors par continuité de f et g, il existe $\frac{1}{3.2^{i_0}} \geqslant r > 0$ tel que $\forall s \in]t, t+r[$, on a $\|f(s)-f(t)\| \leqslant \frac{\epsilon}{3.2^{i_0}}$, $|g(s)-g(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{3.2^{i_0}}$. Comme $t \in U$, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\|f(s)-f(a)\| \leqslant \|f(s)-f(t)\| + \|f(t)-f(a)\| \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{3.2^{i_0}} + g(t)-g(a)+\epsilon(t-a)+\sum_{a_i<t}\frac{\epsilon}{2^i} \leqslant g(s)-g(a)+\epsilon(s-a)+\sum_{a_i<t}\frac{\epsilon}{2^i}+\frac{\epsilon}{2^{i_0}} \\
&\leqslant g(s)-g(a)+\epsilon(s-a)+\sum_{a_i<s}\frac{\epsilon}{2^i}
\end{aligned}$$

pour tout $s \in [t, t+r]$.

Si $t \notin D$, alors f et g sont dérivables à droite en t, et on a $\|f'_d(t)\| \leqslant g'_d(t)$. Il existe donc $r>0$ tel que $\|f'_d(t) - \frac{f(s)-f(t)}{s-t}\| \leqslant \epsilon/2$ et $|g'_d(t) - \frac{g(s)-g(t)}{s-t}| \leqslant \epsilon/2$ pour tout $s \in]t, t+r[$. D'où

$$\begin{aligned}
\|f(s)-f(a)\| &\leqslant \|f(s)-f(t)\| + \|f(t)-f(a)\| \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}(s-t) + \|f'_d(t)\|(s-t) + g(t)-g(a)+\epsilon(t-a)+\sum_{a_i<t}\frac{\epsilon}{2^i} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}(s-t) + |g'_d(t)|(s-t) + g(t)-g(a)+\epsilon(t-a)+\sum_{a_i<s}\frac{\epsilon}{2^i} \\
&\leqslant \epsilon(s-t) + g(s)-g(t)+g(t)-g(a)+\epsilon(t-a)+\sum_{a_i<s}\frac{\epsilon}{2^i} \\
&\leqslant g(s)-g(a)+\epsilon(s-a)+\sum_{a_i<s}\frac{\epsilon}{2^i}
\end{aligned}$$

pour tout $s \in]t, t+r[$. $\square$

Corollaire 3.19 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert convexe de E et $h : \Omega \to F$ une application différentiable sur tout Ω. Alors pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, on a*

$$\|h(x)-h(y)\|_F \leqslant \sup_{z\in\Omega} |||d_z h||| \times \|x-y\|_E$$

où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateur associée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Preuve. Si $\sup_{z\in\Omega}|||d_zh||| = +\infty$, l'inégalité est évidente. Sinon, on pose $f(t) = h\big(x+t(y-x)\big)$ et $g(t) = t\sup_{z\in\Omega}|||d_zh|||\times\|x-y\|_E$. Alors f est dérivable sur $[0,1]$ et vérifie $\|f'(t)\|_F = \|dh(x-y)\|_F \leqslant \sup_{z\in\Omega}|||d_zh|||\times\|x-y\|_E = g'(t)$ et donc, d'après le théorème précédent, on a

$$\|h(x)-h(y)\|_E \leqslant \|f(1)-f(0)\|_E \leqslant g(1)-g(0) = \sup_{z\in\Omega}|||d_zh|||\times\|x-y\|_E.$$

□

Corollaire 3.20 *Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espace vectoriel normé, Ω un ouvert connexe de E et $h:\Omega\to F$ une application différentiable sur tout Ω. Si $d_xh = 0$ pour tout $x\in\Omega$ alors h est constante sur Ω.*

Preuve. Si Ω est convexe, la propriété découle directement du corollaire précèdent.

Si Ω est seulement connexe, on fixe $x_0\in\Omega$ et on pose $A = \{x\in\Omega/h(x) = h(x_0)\}$. Alors A est non vide car il contient x_0. Comme d'habitude, on va montrer que A est fermé et ouvert dans Ω.

Si (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers un élément x de Ω, alors par continuité de h, on a $h(x) = \lim_{n\to\infty}h(x_n) = h(x_0)$ et donc $x\in A$. On en déduit que A est fermé dans Ω.

Si $x\in A$, alors il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subset\Omega$ (car Ω est ouvert dans E). Comme $B(x,r)$ est convexe et que $h_{|B(x,r)}$ est différentiable de différentielle nulle, on a $h(y) = h(x) = h(x_0)$ pour tout $y\in B(x,r)$, et donc $B(x,r)\subset A$. On en déduit que A est ouvert dans Ω.

A est une partie, non vide, ouverte et fermée du connexe Ω et donc $A=\Omega$, ce qui donne le résultat. □

Comme autre application, on va donner une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss:

Théorème 3.21 *Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. D'après la formule de Taylor pour les polynômes (qui se démontre facilement par récurrence sur le degré de P), on a

$$P(z+h) = \sum_{k=1}^{\deg(\mathrm{P})} P^{(k)}(z)\frac{h^k}{k!} = P(z) + P'(z)h + h\epsilon(h)$$

où $\epsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. On en déduit que $d_zP(h) = P'(z)h$. On note F l'ensemble des racines de P' dans $\mathbb{C}$ et $H = P^{-1}\{P(F)\} \supset F$. Une application de la division euclidienne montre que F et H sont des parties finies de $\mathbb{C}$ (tout polynôme de degré d a au plus d racines). Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash P(F)$. Comme $P(F)$ est fini, il est facile de se convaincre que Ω est connexe par arc dans $\mathbb{C}$ et donc Ω est connexe. Soit $\Omega' = P(\mathbb{C}\backslash H) \subset \Omega$.

Ω' est une partie non vide de Ω.

Comme pour tout z appartenant à l'ouvert $\mathbb{C}\backslash H$, d_zP est inversible, le théorème d'inversion local implique que $\Omega' = P(\mathbb{C}\backslash H)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Comme $\Omega' \subset \Omega$, on en déduit que Ω' est un ouvert de Ω.

Enfin, si (z_n) est une suite d'éléments de Ω' qui converge vers un élément z de Ω, alors cette suite est bornée et il existe $M > 0$ tel que $|z_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, il existe $x_n \in \mathbb{C}\backslash F$ tel que $z_n = P(x_n)$. On note $P(z) = a_d z^d + \cdots + a_0$. Si $|x_n| \geqslant \max\big(1, 2\frac{|a_{d-1}|+\cdots+|a_0|}{|a_d|}\big)$, alors on a

$$\begin{aligned} M \geqslant |P(x_n)| &\geqslant |a_d||x_n|^d - |a_{d-1}||x_n|^{d-1} - \cdots - |a_0| \\ &\geqslant |a_d||x_n|^d\Big(1 - \frac{|a_{d-1}|}{|a_d||x_n|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|a_d||x_n|^d}\Big) \\ &\geqslant |a_d||x_n|^d\Big(1 - \frac{|a_{d-1}|}{|a_d||x_n|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|a_d||x_n|}\Big) \geqslant \frac{|a_d||x_n|^d}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n| \leqslant \max\Big(1, 2\frac{|a_{d-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_d|}, \big(\frac{2M}{|a_d|}\big)^{\frac{1}{d}}\Big)$$

La suite (x_n) est bornée dans $\mathbb{C}$ et donc elle admet une suite extraite $(x_{n'})$ qui converge vers un élément x de $\mathbb{C}$. Par continuité de P en x, on a $P(x) = \lim P(x_{n'}) = \lim z_{n'} = z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash P(F)$ et donc $x \in \mathbb{C}\backslash H$. On en déduit que $z = P(x) \in P(\mathbb{C}\backslash H) = \Omega'$, et donc Ω' est un fermé de Ω.

Ω est un connexe et Ω' est une partie non vide, ouverte et fermée de Ω. On a donc $P(\mathbb{C}\backslash H) = \Omega' = \Omega = \mathbb{C}\backslash P(F)$. Comme par ailleurs on a $P(H) = P(F)$, on en déduit que

$$P(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}\backslash H) \cup P(H) = \big(\mathbb{C}\backslash P(F)\big) \cup P(F) = \mathbb{C}$$

et donc P est surjective. En particulier, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. $\square$

Sommaire

Chapitre 4

Espaces complets

4.1 Généralités

Définition 4.1 *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, si $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$ alors $d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon$.*

Proposition 4.1 *Les propriétés suivantes sont très pratiques.*

1) Toute suite convergente est de Cauchy.

2) Toute suite de Cauchy est bornée.

3) Toute suite de Cauchy dont on peut extraire une suite convergente est elle-même convergente.

PREUVE.

1) Si $x_n \to l$ alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $d(x_n, l) \leqslant \epsilon/2$. D'où, si $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$ alors $d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, l) + d(x_q, l) \leqslant \epsilon$.

2) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $d(x_n, x_{n_0}) \leqslant 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_{n_0}, x_n) \leqslant \max\big(d(x_{n_0}, x_1), \cdots, d(x_{n_0}, x_{n_0-1}), 1\big)$.

3) Si $\lim x_{\phi(n)} = l$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, on a $d(x_{\phi(n)}, l) \leqslant \epsilon/2$. Or (x_n) est de Cauchy, et donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_1 \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_1$ alors $d(x_n, x_m) \leqslant \epsilon/2$. Comme $\phi(n) \to \infty$, il existe $k \geqslant n_0$ tel que $m = \phi(k) \geqslant n_1$. On en déduit que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $d(x_n, l) \leqslant d(x_n, x_{\phi(k)}) + d(x_{\phi(k)}, l) \leqslant \epsilon$.

□

Définition 4.2 *(E, d) est complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Théorème 4.2 *Par construction, $\mathbb{R}$ est complet pour la distance usuelle.*

Proposition 4.3 *Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. S'il existe $f : (E, d) \to (E', d')$ bijective et uniformément bi-continue (i.e. f et f^{-1} sont uniformément continues), alors (E, d) est complet si et seulement si (E', d') est complet.*

Preuve. Supposons que (E', d') est complet et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (E, d). Comme f est uniformément continue, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, si $d(x, y) \leqslant \eta$ alors $d'(f(x), f(y)) \leqslant \epsilon$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Cauchy, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$, alors $d(x_p, x_q) \leqslant \eta$, et donc $d'\big(f(x_p), f(x_q)\big) \leqslant \epsilon$. On en déduit que $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans (E', d'), donc convergente vers $y \in E'$. Comme f^{-1} est continue, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(f^{-1}\big(f(x_n)\big)\big)$ converge vers $f^{-1}(y) \in E$. □

Corollaire 4.4 *Soit d' et d deux distances équivalentes sur E, alors (E, d) est complet si et seulement si (E', d') est complet.*

Preuve. En effet, Id est alors bi-Lipschitzien, donc bi-continue. □

Corollaire 4.5 *Tout espace isométrique à un espace complet est complet.*

Remarque 4.1 *Les propriétés pour une suite d'être de Cauchy et pour un espace d'être complet ne sont pas topologiques (elles ne sont pas conservées pas homéomorphisme).*

Exemple 4.1 *Soit $E = \mathbb{R}_+^*$ muni des deux distances $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = |\ln x - \ln y|$. d et d' sont topologiquement équivalentes (car* ln *et* e *étant continues, Id_E est un homéomorphisme), mais (E,d) est non complet. En effet, $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle et donc est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle. On en déduit qu'elle est de Cauchy dans E pour la distance d, mais par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$, elle ne converge pas dans E pour la distance usuelle.*

En revanche (E,d') est complet (car $\ln : E \to \mathbb{R}$ est une isométrie de (E,d') sur $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle) et la suite $(1/n)$ n'est pas de Cauchy pour d'.

4.2 Sous-espaces, espaces produits

4.2.1 Sous-espaces

Théorème 4.6 *Soit (E,d) un espace métrique et F une partie non vide de E. F est muni de la distance induite par d.*

1) Si F est complet pour la distance induite par d alors F est un fermé E

2) Si F est un fermé de E et si (E,d) est complet alors F est complet pour la distance induite par d.

En particulier, si (E,d) est complet alors F est complet pour la distance induite par d si et seulement si F est un fermé de E.

Preuve.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de F qui converge vers l dans E. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour d, et donc pour la distance induite par d sur F. Comme F est complet pour la distance induite, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $l' \in F$ pour la distance induite, et donc pour d. Comme la limite est unique dans E, on a $l = l' \in F$. Donc F est fermé.

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de E. Comme E est complet, il existe $l \in E$ tel que $\lim x_n = l$. Or F est fermé, donc $l \in F$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers l pour la distance induite et F est complet.

□

Remarque 4.2 *$\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$ muni de sa topologie usuelle et $\mathbb{R}$ complet pour la distance usuelle. Or $\mathbb{R} \neq \overline{\mathbb{R}}$. On en déduit qu'il n'existe pas de distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui induise la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et la topologie usuelle sur $\overline{\mathbb{R}}$.*

Théorème 4.7 *Soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties fermées et non vides de E dont le diamètre $\delta(F_n)$ tend vers 0. Alors il existe $a \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$. De plus, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.*

Preuve. Comme les F_n sont non vides, on peut se donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $q \geqslant p$, comme $x_q \in F_q \subset F_p$, on a $d(x_p, x_q) \leqslant \delta(F_p)$. Comme $\delta(F_p) \to 0$, $d(x_p, x_q)$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini (et $q \geqslant p$). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et E est complet, donc il existe $a \in E$ tel que $x_n \to a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \geqslant n$ on a $x_p \in F_p \subset F_n$. Comme $x_p \to a$ et que F_n est fermé, on obtient $a \in F_n$. D'où $\{a\} \subset \cap_n F_n$. Si $b \in \cap_n F_n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(a, b) \in F_n^2$, et donc $d(a, b) \leqslant \delta(F_n)$. En passant à la limite on obtient $d(a, b) \leqslant 0$, et donc $a = b$. On en déduit que $\cap_n F_n = \{a\}$.

Enfin, en reprenant les arguments ci-dessus, on a facilement que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_n \in F_n$ converge dans $\cap_n F_n$, et donc vers a. □

Remarque 4.3 *Toutes les hypothèses du théorème sont nécessaires. En particulier la suite $F_n = [n, +\infty[$ est un suite décroissante de fermés non vides de $\mathbb{R}$ d'intersection vide.*

4.2.2 Espaces produits

Théorème 4.8 *Soit (E_1, d_1), ..., (E_n, d_n) des espaces et métriques et $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ muni d'une des distances équivalentes D_1, D_2 ou D_∞. Alors le produit E est complet si et seulement si tous ses facteurs $(E_i, d_i)_i$ sont complets.*

Preuve. Comme D_1, D_2 et D_∞ sont équivalentes, il suffit de montrer le théorème pour la distance D_∞.

Si (E_i, d_i) n'est pas complet, soit $(x_{i,p})_p$ une suite de Cauchy de (E_i, d_i) qui ne converge pas dans E_i. Alors la suite $(x_1, \ldots, x_{i,p}, \ldots, x_n)$, où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$ sont fixés, est de Cauchy dans E et ne converge pas.

Réciproquement, si tous les espaces (E_i, d_i) sont complets et que $X_p = (x_{1,p}, \ldots, x_{n,p})$ est une suite de Cauchy de E alors pour tout i, on a $d_i(x_{i,p}, x_{i,q}) \leqslant$

$D_\infty(X_p, X_q)$, et donc $(x_{i,p})_p$ est une suite de Cauchy de (E_i, d_i) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Il existe donc $x_i \in E_i$ tel que la suite $(x_{i,p})_p$ tende vers x_i. On en déduit que $(X_p)_p$ tend vers $(x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

Exemple 4.2 *On en déduit que $\mathbb{R}^n$ muni d'une des distances usuelles $D_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $D_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ ou $D_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$ est complet.*

Exemple 4.3 *$\mathbb{C}$ muni de la distance usuelle $d(z,z') = |z - z'|$ est complet (car $(x,y) \mapsto x + iy$ est une isométrie de $(\mathbb{R}^2, D_2)$ sur $(\mathbb{C}, |\cdot|)$). Plus généralement, $\mathbb{C}^n$ muni d'une des distances usuelles $D_1(z,z') = \sum_{i=1}^n |z_i - z'_i|$, $D_2(z,z') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i - z'_i|^2}$ ou $D_\infty(z,z') = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i - z'_i|$ est complet.*

Remarque 4.4 *On verra que plus généralement, tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace métrique complet.*

4.3 Théorème du point fixe

Définition 4.3 *Soit (E,d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite contractante si et seulement si il existe $k \in [0,1[$ telle que pour tout $(x,y) \in E \times E$, $d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k d(x,y)$.*

Théorème 4.9 *Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors f possède un unique point fixe $\alpha \in E$. De plus, pour toute suite $x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tend vers α. Plus précisément, on a*

$$d(\alpha, x_n) \leqslant k^n \frac{d\big(x_0, f(x_0)\big)}{1-k}.$$

Preuve. Soit $x_0 \in E$ et (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors $\forall n \geqslant 1$, on a $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k d(x_n, x_{n-1}) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$. On en déduit que si $q > p$, $d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, x_{p+1}) + \ldots d(x_{q-1}, x_q) \leqslant (k^p + k^{p+1} + \ldots k^{q-1}) d(x_0, x_1)$.

On en déduit que pour tout $q \geqslant p$, on a $d(x_q, x_p) \leqslant k^p \frac{d\big(x_0, f(x_0)\big)}{1-k} \to 0$ quand $p \to +\infty$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, et comme E est complet, il existe $\alpha \in E$ tel que $x_n \to \alpha$. Or f est continue (car Lipschitzienne) et $x_{n+1} = f(x_n)$. En passant à la limite, on obtient $\alpha = f(\alpha)$ et donc α est un point fixe de f. Si $f(\beta) = \beta$ alors $d(\alpha, \beta) = d\big(f(\alpha), f(\beta)\big) \leqslant k d(\alpha, \beta)$. Comme $k \in [0, 1[$, on obtient $d(\alpha, \beta) \leqslant 0$ et donc $\alpha = \beta$. D'où l'unicité du point fixe de f.

En reprenant les arguments précédent, toute suite itérée converge vers un point fixe de f et donc vers α. □

Remarque 4.5 *l'hypothèse "f contractante" ne peut être remplacée en général par l'hypothèse plus faible $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$, comme le montre l'exemple $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$.*

Ce théorème se généralise facilement de la manière suivante.

Corollaire 4.10 *Soit E un espace complet et $f : E \to E$. S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante, alors f admet un unique point fixe et toute suite (x_n) de E telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.*

Preuve. f^p admet un unique point fixe dans E. Les points fixes de f sont des points fixes de f^p, donc f admet au plus un point fixe dans E. Soit $\alpha \in E$ le point fixe de f^p. Comme $f^p\big(f(\alpha)\big) = f\big(f^p(\alpha)\big) = f(\alpha)$, on en déduit, par unicité du point fixe de f^p que $\alpha = f(\alpha)$, d'où l'existence d'un point fixe de f. Enfin, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite itérée de f, alors les suites $(x_{r+np})_n$ (pour $0 \leqslant r < p$) sont des suites itérées de f^p, et donc convergent vers α. On en déduit facilement que $(x_n)_n$ converge vers α. □

4.4 Critère de Cauchy pour les fonctions

Théorème 4.11 (Critère de Cauchy) *Soit (E, d) un espace topologique et (E', d') un espace métrique complet. Soit $X \subset E$ et $a \in E$ tel que $a \in \overline{X}$. Une application $f : X \to E'$ a une limite quand x tend vers a en restant dans X si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $(x, y) \in \big(X \cap U\big)^2$, $d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon$.*

Preuve. Si f tend vers $l \in E'$ quand x tend vers a en restant dans X alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in \big(X \cap$

$U\big)^2$, $d'\big(f(x),l\big) \leqslant \epsilon/2$ et donc pour tout $(x,y) \in \big(X \cap U\big)^2$, $d'\big(f(x),f(y)\big) \leqslant d'\big(f(x),l\big)+d'\big(l,f(y)\big) \leqslant \epsilon$ (la complétude de E' n'est pas nécessaire pour cette implication).

Réciproquement, soit $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X telle que $x_n \to a$ et $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $(x,y) \in \big(X \cap U\big)^2$, $d'\big(f(x),f(y)\big) \leqslant \epsilon$. Comme $x_n \to a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geqslant p \geqslant n_0$, on a $(x_p,x_q) \in (U \cap X)^2$ et donc $d\big(f(x_p),f(x_q)\big) \leqslant \epsilon$. On en déduit que $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme E' est complet, $\big(f(x_n)\big)_n$ converge. On a donc montré que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a, $\big(f(x_n)\big)$ converge dans E'. On a vu précédemment que cela implique que f a une limite quand x tend vers a en restant dans X. □

Corollaire 4.12 (Prolongement des applications uniformément continues) *Soit (E,d) un espace métrique, (E',d') un espace métrique complet et $D \subset E$ une partie dense de E. Si $f : D \to E'$ est une application uniformément continue alors f admet un unique prolongement continue $\tilde{f} : E \to E'$. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E.*

PREUVE. Si $g : E \to E'$ et $h : E \to E'$ sont deux prolongements continus de f ils coïncident sur un fermé de E contenant D et donc sont égaux sur $E = \overline{D}$.

Soit $a \in E$. Comme f est uniformément continue sur D, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple $(x,y) \in D^2$, si $d(x,y) < \eta$ alors $d\big(f(x),f(y)\big) \leqslant \epsilon$. On en déduit que pour tout $(x,y) \in \big(B(a,\eta/2) \cap D\big)^2$ on a $d\big(f(x),f(y)\big) \leqslant \epsilon$, et donc que f vérifie le critère de Cauchy sur D en tout point de $E = \overline{D}$. La fonction $\tilde{f} : E \to E'$ définie par $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a,\, x\in D} f(x)$ est alors un prolongement de f (car f est continue sur D). Il reste à montrer que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E.

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur D, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in D^2$, on a $d'\big(f(x),f(y)\big) \leqslant \epsilon$ dès que $d(x,y) \leqslant \eta$. Soit $(a,b) \in E^2$ tel que $d(a,b) \leqslant \eta/2$. Comme $E = \overline{D}$, il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites d'éléments de D qui tendent respectivement vers a et b. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_n,b_n) \leqslant d(a_n,a) + d(a,b) + d(b_n,b) \leqslant \eta$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a donc $d'\big(f(a_n),f(b_n)\big) \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Comme $f(a_n) \to \tilde{f}(a)$ et $f(b_n) \to \tilde{f}(b)$, on obtient $d'\big(\tilde{f}(a),\tilde{f}(b)\big) \leqslant \epsilon$. □

Théorème 4.13 (complété d'un espace métrique) *Soit (E,d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet (E',d') et une application i :*

$E \to \tilde{E}$ telle que pour tout $(x,y) \in E^2$, $d'\big(i(x), i(y)\big) = d(x,y)$ et $i(E)$ est dense dans E'. (E', d') est unique à isométrie prés et on l'appelle le complété de (E,d).

Preuve. On note F l'ensemble des suites de Cauchy de (E,d). On définit une relation d'équivalence sur F par la relation $(x_n) = X \sim Y = (y_n)$ si et seulement si $d(x_n, y_n) \to 0$ (la transitivité découle de l'inégalité triangulaire). On définit une distance sur $E' = F/\sim$ en posant $d'(x,y) = \lim d(x_n, y_n)$, si (x_n) est un représentant de x et (y_n) est un représentant de y. d' est bien définie car $d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q) \leqslant d(x_p, x_q) + d(x_q, y_q) + d(y_q, y_p) - d(x_q, y_q) \leqslant d(x_p, x_q) + d(y_q, y_p)$, et donc par symétrie

$$\big|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)\big| \leqslant d(x_p, x_q) + d(y_q, y_p)$$

Les suites (x_n) et (y_n) étant de Cauchy, on en déduit que la suite $d(x_n, y_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge dans $\mathbb{R}$. Enfin, si (x'_n) et (y'_n) sont d'autres représentants de x et y alors l'inégalité triangulaire donne $\big|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)\big| \leqslant d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$ et donc la limite $d'(x,y)$ ne dépend pas du choix des représentants.

d' est une distance sur E' car

1. $d'(x,y) \geqslant 0$ comme limite d'une suite positive et si $d(x,y) = 0$, alors pour tout représentant $(x_n)_n$ de x et tout représentant $(y_n)_n$ de y, on a $0 = d(x,y) = \lim d(x_n, y_n)$ et donc $x = y$ par définition de $\sim$.

2. d' est symétrique comme d.

3. $d'(x,z) = \lim d(x_n, z_n) \leqslant \lim d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) = d'(x,y) + d'(y,z)$.

On définit $i : E \to E'$ par $i(x)$ est la classe de la suite constante $x_n = x$ (qui est bien de Cauchy). Alors $d'\big(i(x), i(y)\big) = \lim d(x_n, y_n) = d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

Pour montrer que E' est complet, commençons par remarquer que si (a_n) est une suite de Cauchy de E et $(a_{\phi(n)})$ est une suite extraite de (a_n), alors elle est de Cauchy et $d\big(a_n, a_{\phi(n)}\big) \to 0$ car $\phi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que (a_n) et toutes ses suites extraites représentent le même élément de E'.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E'. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $d'(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$ pour tout $m \geqslant n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite de Cauchy $(a_p^{(n)})_p$ de E qui représente x_n, et quitte à extraire une suite de $(a_p^{(n)})_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut supposer que $d\big(a_p^{(n)}, a_q^{(n)}\big) \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ pour tout $q \geqslant p$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $p_0 = 1$, et on suppose construit $p_0 < \cdots < p_n$ tel que $d\big(a_{p_k}^{(k)}, a_{p_{k+1}}^{(k+1)}\big) \leqslant \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$. Comme $\frac{1}{2^{n+2}} \geqslant d(x_n, x_{n+1}) = \lim_{p\to\infty} d\big(a_p^{(n)}, a_p^{(n+1)}\big)$, il existe $p_{n+1} > p_n$ tel que $d\big(a_{p_{n+1}}^{(n)}, a_{p_{n+1}}^{(n+1)}\big) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $d\big(a_{p_n}^{(n)}, a_{p_{n+1}}^{(n+1)}\big) \leqslant d\big(a_{p_{n+1}}^{(n)}, a_{p_n}^{(n)}\big) + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{p_n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}$ car $p_n \geqslant n$. Par récurrence, on obtient une suite $(a_{p_n}^{(n)})$ telle que pour tout $m \geqslant n$, on a $d\big(a_{p_n}^{(n)}, a_{p_m}^{(m)}\big) \leqslant \sum_{n\leqslant k\leqslant m-1} d\big(a_{p_k}^{(k)}, a_{p_{k+1}}^{(k+1)}\big) \leqslant \sum_{n\leqslant k\leqslant m-1} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. C'est donc une suite de Cauchy de E. Soit x sa classe dans E'. On a $d'(x, x_n) = \lim_q d\big(a_{p_q}^{(q)}, a_q^{(n)}\big)$ et si $q \geqslant p_n$, alors $d\big(a_{p_q}^{(q)}, a_q^{(n)}\big) \leqslant d\big(a_{p_q}^{(q)}, a_{p_n}^{(n)}\big) + d\big(a_{p_n}^{(n)}, a_q^{(n)}\big) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{p_n+1}}$. Donc $d'(x, x_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{p_n+1}} \to 0$. On en déduit que (x_n) converge vers x dans (E', d').

Si (E'', d'') est un autre espace métrique complet pour lequel il existe $j : E \to E''$ vérifiant $d''\big(j(x), j(y)\big) = d(x, y)$ et $j(E)$ est dense dans E'', alors $J = j \circ i^{-1} : i(E) \to E''$ préserve les distances (donc est 1-Lipschitzienne) et d'après le corollaire précédent, J admet un unique prolongement continu $J' : E' \to E''$. Ce prolongement préserve les distances. De même, l'application $I = i \circ j^{-1} : j(E) \to E'$ admet une unique application continue $I' : E'' \to E'$ qui préserve les distances. Alors $I' \circ J'$ est un prolongement continue de $Id_{i(E)}$. Par unicité de ce prolongement, on a $I' \circ J' = Id_{E'}$. De même $J' \circ I' = Id_{E''}$ et donc J' est une isométrie de E' sur E''. $\square$

Sommaire

Chapitre 5

Espaces compacts

5.1 Généralités

Définition 5.1 (Borel-Lebesgue) *Soit E un espace topologique. E est dit compact si et seulement si E est séparé et de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini (i.e. pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ de E telle que $E = \cup_{i\in I} O_i$, il existe $J \subset I$ tel que J est finie et $E = \cup_{j\in J} O_j$).*

De manière équivalente, E est compacte si et seulement si E est séparé et de toute famille de fermés de E d'intersection vide, on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide.

Proposition 5.1 *Soit E un compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vide de E. Alors $\cap_n F_n \neq \emptyset$.*

Preuve. Comme E est compact, si $\cap_n F_n$ est vide alors il existe $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $n_1 < \ldots < n_p$ et $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant p} F_{n_i} = \emptyset$. Or on a $F_{n_1} \supset \ldots \supset F_{n_p}$ et donc $F_{n_p} = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant p} F_{n_i} = \emptyset$, d'où la contradiction. $\square$

Définition 5.2 *Soit E un espace topologique et $X \subset E$. On dit que X est une partie compacte de E si et seulement si X muni de la topologie induite (par celle de E) est compact.*

Proposition 5.2 *Soit E un espace topologique et $X \subset E$ muni de la topologie induite. On suppose que X est séparé. Alors X est compacte si et seulement si de toute famille d'ouverts de E recouvrant X on peut extraire une sous-famille finie recouvrant X.*

PREUVE. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $X \subset \cup_{i\in I} O_i$. Alors $X = \cup_{i\in I}\big(X \cap O_i\big)$. Si X est compacte alors il existe $J \subset I$ finie telle que $X = \cup_{j\in J}\big(X \cap O_i\big)$, et donc $X \subset \cup_{j\in J} O_j$.

On démontre de même la réciproque en utilisant que U est un ouvert de X pour la topologie induite si et seulement si il existe une ouvert O de E tel que $U = O \cap X$. □

De même on démontre la proposition suivante:

Proposition 5.3 *Soit E un espace topologique, $F \subset E$ muni de la topologie induite et X une partie de F. X est une partie compacte de E si et seulement si X est un partie compacte de F. La propriété pour une partie d'être compacte est donc intrinsèque.*

Exemples 5.1

1) toute partie finie d'un espace séparé est compacte.

2) Soit E un espace séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers l, alors $X = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compacte:

En effet, si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E qui recouvre X, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $l \in O_{i_0}$. Comme $x_n \to l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in O_{i_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Comme pour tout $n \leqslant n_0$, il existe $i_{n+1} \in I$ tel que $x_n \in O_{i_{n+1}}$, on en déduit que $X \subset \cup_{j=0}^{n_0+1} O_{i_j}$.

3) $\mathbb{R}$ est non compacte car $F_n = [n, +\infty[$ est une suite décroissante de fermés non vides de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est vide.

4) $X =]0,1]$ n'est pas compact compact car $O_n =]1/n, 1]$ est une suite d'ouverts de X recouvrant X et dont on ne peut extraire aucun sous recouvrement fini.

Théorème 5.4 *Soit E un espace topologique séparé et $X \subset E$.*

1) Si X est compacte alors X est un fermé de E.

2) Si X est un fermé de E et E est compacte alors X est compacte.

En particulier, si E est compacte alors $X \subset E$ est compacte si et seulement si X est fermée dans E.

Preuve. 1) soit $y \in E \backslash X$. Comme E est séparé, pour tout $x \in X$, il existe des ouverts $W_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(y)$ tels que $W_x \cap V_x = \emptyset$. Alors $(W_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est compacte, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tels que $X \subset W^y = \cup_{1 \leqslant i \leqslant n} W_{x_i}$. Alors $V^y = \cap_{1 \leqslant i \leqslant n} V_{x_i}$ est un voisinage ouvert de y et $V^y \cap X \subset V^y \cap (\cup_{1 \leqslant i \leqslant n} W_{x_i}) = \cup_{1 \leqslant i \leqslant n}(V^y \cap W_{x_i}) \subset \cup_{1 \leqslant i \leqslant n}(V_{x_i} \cap W_{x_i}) = \emptyset$. Donc $\forall y \in E \backslash X$, il existe $V^y \in \mathcal{V}(y)$ tel que $V^y \subset E \backslash X$, on en déduit que $E \backslash X$ est ouvert.

2) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de X d'intersection vide, alors c'est aussi une famille de fermés de E d'intersection vide (car X est un fermé de E). Par compacité de E on en déduit qu'il existe une sous famille finie d'intersection vide, d'où la compacité de X. □

Remarque 5.1 *Soit E un espace séparé, X et Y deux parties compactes de E disjointes. Soit $y \in Y$. En appliquant ce qui est fait dans la preuve du point 1) du théorème précèdent, on obtient deux ouverts disjoints W^y et V^y tels que $W^y \supset X$ et $y \in V^y$. Comme $(V^y)_{y \in Y}$ est un recouvrement de Y et que Y est compact, il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$ tels que Y soit inclus dans l'ouvert $V = \cup_i V^{y_i}$. De plus $W = \cap_i W^{y_i}$ est un ouvert qui contient X et on a $V \cap W = \left(\cup_i V^{y_i}\right) \cap \left(\cap_i W^{y_i}\right) \subset \cup_i \left(V^{y_i} \cap W^{y_i}\right) = \emptyset$.*

Donc si X et Y sont deux parties compactes et disjointes et E et si E est séparé, alors il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $X \subset U$ et $Y \subset V$.

5.2 Propriétés des suites d'un compact

Théorème 5.5 *Soit E un espace compact.*

1) toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E admet une valeur d'adhérence.

2) Si $(x_n)_n$ admet une seule valeur d'adhérence, alors elle converge dans E.

Preuve. 1) Soit $S_n = \{x_p,\, p \geqslant n\}$. On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est égal à $A = \cap_n \overline{S_n}$. Comme $(\overline{S_n})_n$ est une suite décroissante de fermés non vides de E et que E est compact, A est non vide.

2) Soit a l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ et V un voisinage ouvert de a. Comme $F_n = \overline{S_n} \cap (E\backslash V)$ est une suite décroissante de fermés de E et que $\cap_n F_n = (\cap \overline{S_n}) \cap (E\backslash V) = \{a\} \cap (E\backslash V) = \varnothing$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0} = \varnothing$, et donc $S_{n_0} \subset \overline{S_{n_0}} \subset (E\backslash V)$. On en déduit que $x_n \in V$ pour tout $n \geqslant n_0$. $\square$

Corollaire 5.6 *Tout espace métrique compact est complet. La réciproque est fausse.*

Preuve. Rappelons que toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge et que $\mathbb{R}$ est complet mais non compact $\square$

Théorème 5.7 *Soit E un espace métrique (ou à topologie métrisable). E est compact si et seulement si toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence (i.e. admet une sous-suite qui converge).*

Preuve. D'après le théorème précèdent (valable pour tout compact) et la caractérisation des valeurs d'adhérence en terme de suites extraites, il suffit de montrer le sens indirect.

Comme E est un espace métrique, il est séparé. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E recouvrant E. On a besoin d'un premier lemme:

Lemme 5.8 (de Lebesgue) *il existe $r > 0$ tel que pour tout point x de E, la boule $B(x, r)$ est contenue dans au moins un des ouverts O_i.*

Ce lemme se démontre par l'absurde, si pour tout $r > 0$ il existe $x \in E$ tel que $B(x, r)$ ne soit inclus dans aucun O_i, alors en posant $r = 1/n$, on obtient une suite $(x_n)_n$ tel que $B(x_n, 1/n)$ n'est inclus dans aucun des O_i. Soit $(x_{\phi(n)})_n$ une suite extraite qui converge vers $a \in E$ et O_{i_0} tel que $a \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset O_{i_0}$. Or $x_{\phi(n)} \to a$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\phi(n)} \in B(a, \rho/2)$ pour tout $n \geqslant n_0$. De même, $1/\phi(n) \to 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $1/\phi(n) < \rho/2$. En prenant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient $d(a, x_{\phi(N)}) < \rho/2$ et $1/\phi(N) < \rho/2$, d'où $B\big(x_{\phi(n)}, 1/\phi(n)\big) \subset B(a, \rho) \subset O_{i_0}$, d'où la contradiction.

On aura besoin d'un second lemme:

Lemme 5.9 *Pour tout $r > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon r.*

Ici encore on fait une preuve par l'absurde. Soit $x_0 \in E$. Si E n'est pas recouvert par $B(x_0, r)$ donc il existe $x_1 \in E \backslash B(x_0, r)$, i.e. tel que $d(x_0, x_1) \geqslant r$. Supposons construit $(x_0, \ldots, x_n)$ tels que $d(x_i, x_j) \geqslant r$ si $i \neq j$. Si $E \neq \cup_{0 \leqslant i \leqslant n} B(x_i, r)$, il existe $x_{n+1} \in E \backslash \cup_{0 \leqslant i \leqslant n} B(x_i, r)$, et donc $d(x_{n+1}, x_i) \geqslant r$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Le lemme est faux alors obtient par récurrence une suite $(x_n)_n$ de points de E telle que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, si $i \neq j$ alors $d(x_i, x_j) \geqslant r$. Comme une telle suite n'a pas de suite extraite de Cauchy, on a une contradiction avec l'hypothèse sur E.

Pour finir la preuve du théorème, soit $r > 0$ le rayon donné par le lemme de Lebesgue, et $\big(B(x_k, r)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un recouvrement fini de E par des boules de rayon r. Pour chaque $1 \leqslant k \leqslant n$ il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_i, r) \subset O_{i_k}$. On en déduit alors que $E = \cup_k B(x_k, r) \subset \cup_k O_{i_k}$, et donc E est compacte. □

Le théorème de Bolzano-Weierstrass combiné au théorème précédent donne les corollaires importants suivants.

Corollaire 5.10 *Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact et $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle est compact.*

Théorème 5.11 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. On munit $E_1 \times E_2$ de la topologie produit. Si E_1 et E_2 sont compacts alors $E_1 \times E_2$ est compact.*

Preuve. On sait que la topologie produit de $E_1 \times E_2$ est métrisable (associée à D_1, D_2 ou D_∞. Soit $(x_n, y_n)_n \in (E_1 \times E_2)^{\mathbb{N}}$. $(x_n)_n$ est une suite de points du compact E_1, donc il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un point $l_1 \in E_1$. $(y_{\phi(n)})$ est une suite de point de E_2, donc il existe une suite de extraite $(y_{\phi(\psi(n))})_n$ qui converge vers $l_2 \in E_2$. Alors la suite $(x_{\phi(\psi(n))}, y_{\phi(\psi(n))})_n$ est extraite de la suite (x_n, y_n) et converge vers $(l_1, l_2) \in E_1 \times E_2$. □

Remarque 5.2

1) *bien sur ce théorème se généralise à un produit fini de compacts.*

2) *En fait le produit d'une famille finie d'espaces topologiques compacts est aussi un espace topologique compact.*

5.3 Parties compactes de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^n$

Proposition 5.12 *(E, d) un espace métrique et $X \subset E$. Si X est compact alors X est fermé et borné.*

PREUVE. On sait déjà qu'une partie compacte est fermée. Comme $\big(B(x, 1)\big)_{x\in X}$ recouvre X et que X est compacte, on en déduit qu'il existe $(x_1, \ldots, x_k) \in X$ tels que $X \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant k} B(x_i, 1)$. Si on note $\delta = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant k} d(x_i, x_j)$ alors pour tout $(x, y) \in X^2$, il existe $(i, j) \in \{1, \ldots, k\}^2$ tels que $x \in B(x_i, 1)$ et $y \in B(x_j, 1)$, d'où $d(x, y) \leqslant 2 + d(x_i, x_j) \leqslant \delta + 2$. Le diamètre de X est donc majoré par $2 + \delta$. □

Remarque 5.3 *La réciproque est fausse. Par exemple, la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé de dimension infinie est non compacte (théorème de Riesz).*

Théorème 5.13 *Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ (pour la distance usuelle).*

PREUVE. Soit X une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Alors X est contenu dans un segment de $\mathbb{R}$. Comme X est un fermé de $\mathbb{R}$, c'est un fermé du segment. Comme les segments sont compacts, X est aussi compact. □

Théorème 5.14 *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées (pour les distances usuelles).*

PREUVE. On travaille avec D_∞. Comme X est bornée, il existe $M > 0$ telle que $X \subset B'(0, M) = [-M, M]^n$. Comme $[-M, M]$ est un compact de $\mathbb{R}$, $[-M, M]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme X est un fermé de $\mathbb{R}^n$, donc de $[-M, M]^n$, on en déduit que X est un compact. □

Théorème 5.15 *Les parties compactes de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{C}^n$ sont les parties fermées et bornées (pour la distance usuelle).*

PREUVE. Soit X une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}^n$ pour la distance usuelle. Comme $\phi : (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ est une isométrie (et donc un homéomorphisme), on en déduit que $\phi(X)$ est fermée (car X est fermée et ϕ^{-1} est continue) et bornée (car X est bornée et ϕ est un isométrie) dans $\mathbb{R}^{2n}$. Donc X est une partie compacte de $\mathbb{R}^{2n}$. Enfin, $X = \phi^{-1}(\phi(X))$ et donc X est compacte (l'image d'un compact par une application continue est compact, cf plus bas). □

Corollaire 5.16

1) toute suite bornée de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^n$ possède une valeur d'adhérence (i.e. une suite extraite qui converge).

2) toute suite bornée de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^n$ qui possède une unique valeur d'adhérence converge.

5.4 Fonctions continues sur les compacts

Théorème 5.17 *Soit E un espace compact et F un espace topologique séparé. Si $f : E \to F$ est continue alors $f(E)$ est une partie compacte de F.*

PREUVE. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de F recouvrant $f(E)$. Comme f est continue, $\big(f^{-1}(O_i)\big)_{\in I}$ est un recouvrement ouvert de E et par compacité de E, il existe une partie finie J de I telle que $E = \cup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$. Comme $f(E) = f\big(\cup_{j\in J} f^{-1}(O_j)\big) = \cup_{j\in J} f\big(f^{-1}(O_j)\big) \subset \cup_{j\in J} O_j$, on en déduit que $f(E)$ est une partie compacte de F. □

Exemples 5.2

1) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est compacte et l'application $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \overline{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x)$ si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $f(-\pi/2) = -\infty)$ et $f(\pi/2) = +\infty$ est continue. On retrouve que $\overline{\mathbb{R}}$ est un compact pour la topologie usuelle.

2) $f : x \in [0, 2\pi[\mapsto e^{ix} \in \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est bijective et continue. Mais f^{-1} ne peut-être continue car $[0, 2\pi[$ n'est pas compacte, contrairement à $\mathbb{U}$.

Corollaire 5.18 *Soit E un compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur E et il existe $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = \sup_E f$ et $f(y) = \inf_E f$. On dit que les applications continues sur un compact atteignent leurs bornes.*

PREUVE. Si f est continue et E compact alors $f(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. On en déduit que $f(E)$ est non vide, fermée et bornée dans $\mathbb{R}$. Donc f est bornée. Soit $y_0 = \sup f(E) \in \mathbb{R}$, alors comme $f(E)$ est fermé on a $y_0 \in f(E)$, et donc il existe $x_0 \in f(E)$ telle que $y_0 = f(x_0)$. On montre de même que l'inf est atteint. □

Remarque 5.4 *En particulier, si (E, d) est un espace métrique, A et B sont des parties compactes non vides de E, et si $x \in E$, alors la distance de x à A est atteinte (i.e. il existe $x_0 \in A$ tel que $d(x, x_0) = \inf_{a\in A} d(x, a)$). De même la distance entre A et B est atteinte (i.e. il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $d(a_0, b_0) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a, b)$) et le diamètre d'un compact est atteint (i.e. il existe $(a, a') \in A$ tels que $d(a, a') = \delta(A)$).*

Pour démontrer ces propriétés, il suffit de remarquer que $a \in A \mapsto d(x, a) \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in A \times B \mapsto d(a, b) \in \mathbb{R}$ et $(a, a') \in A^2 \mapsto d(a, a') \in \mathbb{R}$ sont continues.

Théorème 5.19 (Heine) *Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application. Si E est compact et f continue, alors f est uniformément continue.*

PREUVE. Soit $\epsilon > 0$ fixé. f est continue en chaque point de E, donc pour tout $x \in E$, il existe $\eta_x > 0$ tel que pour tout $y \in E$, si $d(x, y) \leqslant \eta_x$, alors $d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon/2$. Comme $\big(B(x, \eta_x)\big)_{x\in E}$ est une famille d'ouverts recouvrant le compact E, il existe une famille finie $x_1, \ldots, x_n$ de points de E tels que $E \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant k} B(x_i, \eta_{x_i}/2)$. Soit alors $\eta = \min(\eta_{x_1}, \ldots, \eta_{x_n})/2$. Si $(x, y) \in E^2$ sont tels que $d(x, y) < \eta$, alors il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $x \in B(x_i, \eta_{x_i}/2)$ et donc $d'\big(f(x_i), f(x)\big) \leqslant \epsilon/2$ et comme $d(y, x_i) \leqslant d(y, x) + d(x, x_i) \leqslant \eta + \eta_{x_i}/2 \leqslant \eta_{x_i}$, on a aussi $d'\big(f(x_i), f(y)\big) \leqslant \epsilon/2$. On en déduit que $d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon$. □

Exemple 5.3 *Toute application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est bornée et uniformément continue.*

En effet, si P est une période de f alors $f(\mathbb{R}) = f([0, P])$ et donc f est bornée. On a aussi $f_{|[0,P+1]}$ uniformément continue, i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $1 \geqslant \eta > 0$ tel que si $(x, y) \in [0, P + 1]^2$ vérifient $d(x, y) \leqslant \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$. Si maintenant (x, y) sont deux points de $\mathbb{R}$ tels que $d(x, y) < \eta \leqslant 1$ (et $x < y$), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - kP \in [0, P]$ et on a $y - kP \in [0, P + 1]$, et on a donc $|f(x) - f(y)| = |f(x - kP) - f(y - kP)| \leqslant \epsilon$.

Bibliographie

[1] J.-A. Dieudonné *Éléments d'analyse*, Tome 1, Gauthier Villars

[2] L. Schwartz *Analyse*, Tome 1, Hermann

[3] C. Tisseron *Notions de topologie, Introduction aux espaces fonctionnels*, Hermann

Rappels de topologie pour la Licence