Université de Nice Sophia Antipolis — Enseignant : Mohamed Elkadi

L2Mass, Math 3, 2015 – 16

Compilation de la première interro pour les 2 groupes

Exercice 1 *Calculer* $\int x^\alpha \ln x \, dx$.

Exercice 2

1. *Calculer* $\int \frac{x^2-x}{x+1} \, dx$.
2. *En déduire* $\int_1^2 \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \, dx$.

Exercice 3 *Calculer* $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

Exercice 4 *Déterminer une fonction* f*, si elle existe, vérifiant* $f'(1) = 3$*,* $f''(1) = 7$*,* $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$ *et* $f'(x)$ *est de la forme* $\alpha x + \beta x^2$.

Exercice 5

1. *Soit* f *une fonction continue dont la primitive sur [a,b] est* F*. On définit une autre fonction* g *sur* $]a, b[$ *en posant* $g(t) = \int_a^t f(x)dx$*. Montrer que cette fonction est dérivable et calculer sa dérivée.*
2. *On définit la fonction* $x \mapsto \int_0^{\sqrt{\ln(x^2+1)}} e^{-t^2} dt$.
   (a) *Déterminer son domaine de définition.*
   (b) *Montrer qu'elle est dérivable et calculer sa dérivée.*

Exercice 6 *L'intégrale* $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^3} \, dx$ *est-elle convergente ?*

Exercice 7 *L'intégrale* $\int_0^\infty \frac{x}{e^x} \, dx$ *est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa valeur.*

Compilation de la deuxième interro pour les 2 groupes

Exercice 8

1. (a) *Décrire, en détail, l'algorithme qui permet de tester si une matrice est diagonalisabe.*
   (b) *Lorsque la matrice est diagonalisable, expliquer, en détail, comment la diagonaliser.*
2. *Donner un exemple d'une matrice de taille* 4 *non diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.
3. *Une matrice diagonalisable est-elle inversible ?*
4. *Quelle est la forme d'une matrice de taille* 3 *diagonalisable ayant une valeur propre triple ?*

Exercice 9 *Soit*

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec a un nombre réel.

1. *Pour quelles valeurs de a, M_a est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*

2. *Diagonaliser M_a, lorsque c'est possible.*

Exercice 10 *Soient a, b, c, d des nombres réels. On considère la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. *Rappeler la définition d'une matrice inversible.*

2. *Calculer $(a+d)M - M^2$. Puis, en déduire la condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que M soit inversible, et la forme de M^{-1}.*

3. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres pour que M soit inversible.*

4. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a, b, c, d pour que la matrice M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 11 *Soit a un nombre réel. On considère la matrice*

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. (a) *Completer la phrase suivante : $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice A si, et seulement si, la matrice $A - \lambda\mathbb{I}$ ... inversible.*

   (b) *En déduire une valeur propre de M_a.*

2. (a) *Si la somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice A est la même, montrer que cette somme est une valeur propre de A.*

   (b) *En déduire une autre valeur propre de la matrice M_a.*

3. (a) *Déterminer les dimensions des sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres trouvées.*

   (b) *Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres de M_a.*

   (c) *Pour quelles valeurs de a, la matrice M_a est diagonalisable ?*

   (d) *Diagonaliser M_a, lorsque c'est possible.*