Exercice 1 1. *Ecrire le système linéaire* 3×3 *avec* $a_{i,j} = ij - i - j - 2$ *et* $b_i = -2i + 2$.

2. *Résoudre ce système en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.*

Exercice 2 1. *Quelle est l'interprétation géométrique d'un système linéaire* 2×2 *?*

2. *Quelle est l'interprétation géométrique d'un système formée d'équations en* 3 *variables ?*

3. *Quel est l'ensemble de solutions de chacun des systèmes linéaires précédents ?*

Exercice 3 *Soient* A *et* B *deux matrices.*

1. *Est-il vrai que le produit* AB *existe sans que le produit* BA *existe ?*
2. *Si les matrices* AB *et* BA *existent, est-ce qu'elles sont du même type ?*
3. *Si les matrices* AB *et* BA *sont du même type, est-ce que l'on a* $AB = BA$ *?*
4. *Si la matrice* A *est non nulle et* $AB = 0$*, peut-on conclure que* $B = 0$ *?*
5. *Est-ce qu'il existe une matrice* C *tel que* $A \neq B$ *alors que* $CA = CB$ *?*
6. *Est-il vrai que* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *?*

Exercice 4 1. *Soit* α *un réel. Résoudre le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3x + y + \alpha z & = & 3 - 4\alpha \\ -2x + 4y - \alpha z & = & \alpha - 4 \\ (\alpha - 2)x - 7y + 4z & = & 23 \end{array}\right.$$

2. *Soient* α *et* β *deux réels. Résoudre le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_3 & = & 2 \\ x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 & = & 6 \\ x_2 + x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer de deux manières (déterminant et Gauss) que cette matrice est inversible.*
2. *Calculer son inverse de deux manières différentes.*

Exercice 6 *Enoncer et prouver la règle de Cramer pour les systèmes linéaires. Puis, résoudre le système linéaire dont la matrice est celle de l'exercice 5 et un second membre quelconque.*

Exercice 7 *1. Soit λ un réel. Résoudre le système linéaire*

$$\begin{cases} x+2z &= \lambda x \\ y+z &= \lambda y \\ 2x+y+5z &= \lambda z \end{cases}$$

2. Que représente les ensembles de solutions de ce système linéaire ?

Exercice 8 *Trouver, si possible, une matrice M de taille 3 inversible qui vérifie $M^3+M=0$.*

Exercice 9 *Soit J la matrice 3×3 dont tous les coefficients sont égaux à 1 et* $M = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \alpha-2 \\ 1 & -\beta & 2-\beta \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Pour quelles valeurs de α et β, la matrice $M+J$ est inversible ?*
2. *Pour quelles valeurs de α et β, la matrice MJ est inversible ?*

Exercice 10 *Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ *soit inversible.*

Exercice 11 *Il y a sur un parking 66 véhicules (des vélos, des motos, des voitures et des camions ayant $2, 2, 4$ et 4 roues, respectivement). Sachant que le nombre total de roues est 252 et qu'il y a quatre fois plus de voitures que de camions, combien y'a-t-il de vélos, de motos, de voitures et de camions ?*

Exercice 12 *Montrer géométriquement que le déterminant d'une matrice 2×2 correspond à l'aire du parallélogramme déterminé par les deux vecteurs colonnes de la matrice.*