Exercice 1 *On considère la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $\forall n \geq 2, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. On se propose d'expliciter f_n en fonction de n.*

1. *On pose $F_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que $F_n = AF_{n-1}$, où A est une matrice que l'on déterminera.*
2. *Diagonaliser A.*
3. *Vérifier que $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\big)$.*
4. *En déduire que f_n est l'entier le plus proche de $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.*
5. *Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$.*

Exercice 2 *Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.*

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Si v_1 est un vecteur propre de A, déterminer un vecteur v_2 tel que $(A - 3\mathbb{I})(v_2) = v_1$.*
3. *Si P est la matrice dont les colonnes sont données par v_1 et v_2, calculer $T = P^{-1}AP$.*
4. *On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
   (a) *Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.*
   (b) *En écrivant $T = 3\mathbb{I} + N$, déterminer T^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.*
   (c) *En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.*
5. *Résoudre le système de suites*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 2v_n \end{aligned}$$

Exercice 3 *Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

1. *La matrice B est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit $\{v_1, v_2\}$ une famille libre de vecteurs propres de B. Trouver un vecteur v_3 vérifiant $(B - 3\mathbb{I})(v_3) = v_2$.*
3. *Si P est la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3, calculer $T = P^{-1}BP$.*
4. *Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 4 *Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.*

1. *La matrice C est-elle diagonalisable ?*

2. *Soit v_1 un vecteur propre de A. Déterminer deux vecteurs v_2 et v_3 vérifiant $(C-2\mathbb{I})(v_2)=v_1$ et $(C-2\mathbb{I})(v_3)=v_2$.*

3. *Si P est la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3, calculer $T=P^{-1}CP$.*

4. *Déterminer T^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.*