1. Exercices sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1.1. Équations de la forme $y' = f$

1. Déterminer les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y'(t) = t^3$.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 1.2 Équation homogène

1. Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \cos(t)y = 0$.
2. Donner l'ensemble des solutions y sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' + \ln(t)y = 0$ qui vérifient $y(1) = 1$.

Exercice 1.3 Équation avec second membre

1. Donner l'ensemble des solutions y sur $]-2, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$y' + \frac{1+t}{(2+t)(3+t)}y = \frac{1+t}{(2+t)(3+t)}.$$
2. Donner l'ensemble des solutions y sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = \frac{e^{-3t}}{1+t^2}$. qui vérifient $y(0) = 3$.

Exercice 1.4 Formule générale Soient $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.

Exercice 1.5 Équation de la forme $a(t)y' + b(t)y = 0$

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle
$$ty'(t) - 2y(t) = 0.$$
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 1.6 Équation fonctionnelle et équation différentielle Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tous réels u et v,
$$f(u+v) = f(u)f(v).$$
Indication : on cherchera une équation différentielle linéaire vérifiée par une telle fonction.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 1.7 Solutions des équations homogènes d'ordre 1 Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonctions continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On veut déterminer toutes les solutions sur I de l'équation différentielle (E) $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.

1. Déterminer une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de sorte que $t \mapsto \exp(f(t))$ soit solution sur I de l'équation.
2. Soit y_0 une solution sur I de (E). Déterminer une équation différentielle vérifiée par λ, avec $\lambda(t) = e^{-f(t)}y_0(t)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions sur I de (E).

Exercice 1.8 Solution générale = solution particulière+solution générale de l'équation homogène On note $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $y_0 : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Montrer que l'ensemble des solutions sur I de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y_0 + y_h$, où y_h est une solution sur I de l'équation homogène associée $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 1.9 Équations à variables séparables Donner une méthode pour résoudre les équations différentielles de la forme $y'f(y) = g(t)$. Résoudre l'équation différentielle $y' = (1+y^2)t^2$. Même question pour $y' = e^{y+t}$.

2. Exercices sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 2.1 Équation d'ordre 2 sans terme en y Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$e^t y''(t) + e^{2t} y'(t) = 0.$$

Exercice 2.2 Équation homogène d'ordre 2 Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 5y = 0$. Déterminer aussi l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ qui vérifient $y(0) = 1$.

Exercice 2.3 Équation d'ordre 2 avec second membre Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

$$y'' + 8y' + 12y(t) = \sin(t).$$

Exercice 2.4 Changement de fonction inconnue On cherche dans cet exercice à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) suivante

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2.$$

1. On pose $z(t) = y(e^t)$. Calculer z' et z'' en fonction des dérivées de y. Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') que l'on déterminera.
2. Résoudre l'équation (E') et en déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E).

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 2.5 Solutions des équations d'ordre 2 homogènes à coefficients constants Soient a et b deux nombres réels. Déterminer toutes les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y''(t)+ay'(t)+by(t) = 0$. On commencera par déterminer une solution de la forme $t \mapsto e^{rt}$, avec $r \in \mathbb{C}$. Puis, si y est solution de l'équation, on posera $y(t) = \lambda(t)e^{rt}$ pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation.

Pour aller plus loin

Exercice 2.6 Etude qualitative Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs positives ou nulles distincte de la fonction nulle. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + p(x)y = 0$ s'annule en au moins un point.